

O teorema dos quatro vértices e sua recíproca

MARIO JORGE DIAS CARNEIRO¹
RONALDO ALVES GARCIA²

4 de julho de 2018

¹www.mat.ufmg.br, carneiro@mat.ufmg.br

²www.mat.ufg.br/docentes/ronaldo, ragarcia@ufg.br

School on Singularity Theory, 15 - 21 July 2018, ICMC-USP.

Dedicado às nossas famílias

Sumário

1	Curvatura de curvas planas	5
1.0.1	O que é curvatura?	6
1.0.2	Círculo Osculador.	7
1.0.3	Arcos Monótonos.	9
1.0.4	Curvas Convexas.	11
1.1	Envelope de retas e evoluta de uma curva.	13
1.2	Exercícios.	17
2	Teorema dos Quatro Vértices	25
2.1	Provas do TQV.	25
2.1.1	Prova Analítica.	25
2.1.2	Função suporte.	26
2.1.3	Guggenheimer - Círculos bitangentes.	27
2.1.4	Conjunto de simetria.	30
2.1.5	A prova de R. Osserman: considere o círculo circunscrito.	34
2.1.6	Outra prova analítica do teorema dos quatro ou mais vértices.	37
2.1.7	Prova geométrica do teorema dos 4 vértices.	39
2.2	Curvas definidas implicitamente.	41
2.3	Curvas não simples.	43
2.4	Exercícios.	44
3	Recíproca do Teorema dos Quatro Vértices	53
3.1	Recíproca do TQV.	53
3.1.1	Uma prova para o caso convexo usando séries de Fourier.	53
3.1.2	Deformações da curvatura por mudanças de coordenadas.	57
3.1.3	Resolvendo a equação em uma situação mais simples.	60
3.1.4	A solução do caso convexo.	63
3.1.5	Conclusão da recíproca do TQV.	66
3.2	Exercícios.	67

4	Curvatura afim de curvas planas	71
4.0.1	Comprimento afim de curvas planas.	71
4.0.2	Ponto de vista da geometria afim.	72
4.0.3	Intepretação geométrica do vetor normal afim.	74
4.0.4	Contato com cônicas.	76
4.0.5	Deformação de cônicas.	78
4.1	Conjunto focal afim.	80
4.2	Exercícios.	81
5	Problema de Toeplitz	85
5.1	Problema do Quadrado Inscrito de Toeplitz.	85
5.2	Exercícios.	88

Prefácio

“ The product of mathematics is clarity and understanding. Not theorems, by themselves. ... In short, mathematics only exists in a living community of mathematicians that spreads understanding and breathes life into ideas both old and new.”

– W. Thurston (1946-2012).

A leitura do artigo "The four vertex theorem and its converse" de D. DeTurck, H. Gluck, D. Pomerleano e D. Shea Vick [16] e do capítulo "Around the four vertices Theorem"[26, Lecture 10] do livro de D. Fuchs e S. Tabachnikov, motivou a elaboração dessas notas para um curso na VIII Bienal de Matemática da Sociedade Brasileira de Matemática.

O Teorema dos Quatro Vértices (TQV) tem uma longa história. Em 1909, S. Mukhopadhyaya provou a primeira versão: uma oval (curva plana regular simples, fechada com curvatura estritamente positiva) que não é um círculo, possui pelo menos quatro pontos extremos da curvatura (dois máximos e dois mínimos locais).

Este resultado foi generalizado em vários contextos e é possível encontrar várias provas diferentes. A. Kneser, em 1912, provou o teorema para o caso não convexo. W. C. Graustein, em 1937, e S. B. Jackson, em 1944, estudaram com mais detalhes a localização dos vértices em curvas fechadas regulares não necessariamente simples.

Outras provas do teorema surgiram usando propriedades analíticas ou geométricas (círculos inscritos bitangentes). Mais recentemente, em 1985, R. Osserman, obteve uma relação entre o número de vértices de uma curva simples fechada de classe C^2 com o número de componentes da intersecção do traço da curva com o seu círculo circunscrito.

A recíproca do teorema dos quatro vértices para o caso convexo foi provada por H. Gluck, em 1971, motivado por um contexto mais geral (Problema de Minkowski generalizado) sobre a existência de esferas no espaço euclidiano com uma dada função curvatura Gaussiana estritamente positiva.

A recíproca no caso geral (sem a hipótese de curvatura estritamente positiva) foi provada por B. Dahlberg, em 1997.

O Teorema Fundamental das Curvas Planas afirma que a curvatura é o único invariante geométrico local das curvas regulares, restando assim investigar propriedades globais.

A literatura sobre o TQV e tópicos relacionados é bastante ampla e cada abordagem, seja analítica ou geométrica revela novos aspectos e propriedades interessantes sobre as curvas planas. Assim sendo, podemos afirmar que o TQV serve de pretexto para introduzir ferramentas matemáticas poderosas, muitas das quais envolvem ideias ou conceitos que podem ser generalizados em outros contextos, para curvas em superfícies ou para dimensões mais altas. Essas ideias surgem em várias situações: contato entre curvas, singularidades de aplicações, homotopia, deformação e número de voltas, funções periódicas e equações diferenciais ordinárias.

Por outro lado, foi necessário limitar o escopo dessas notas evitando o enciclopédismo e dispersão. Por esse motivo, os exercícios propostos têm um duplo objetivo: complementar ou aprofundar o tópico exposto e aguçar a curiosidade do leitor ou leitora, motivando-os a explorar novos desdobramentos. Por essas razões, o nível dos exercícios varia desde aqueles de aplicação quase que imediata de conceitos até desafios ou perguntas cujas respostas não estão facilmente disponíveis.

Com o objetivo de discutir algumas ideias que nos conduzem a novas indagações, nos capítulos finais, são apresentados alguns tópicos sobre curvas planas que esperamos motivem o leitor a fazer as suas próprias expedições.

"I think it is said that Gauss had ten different proofs for the law of quadratic reciprocity. Any good theorem should have several proofs, the more the better. For two reasons: usually, different proofs have different strengths and weaknesses, and they generalize in different directions - they are not just repetitions of each other."
Michael Atiyah (1929 -).

No capítulo **1** introduzimos o conceito de curvatura, círculo osculador, arcos monótonos, vértice, envelope e evoluta.

No capítulo **2** várias demonstrações do teorema dos 4-vértices são apresentadas, somente a

No capítulo **3** a recíproca do teorema dos 4-vértices será analisada com detalhes no caso de ovais convexas.

No capítulo **4** apresentamos outro tópico sobre curvas convexas, a geometria diferencial afim e o teorema dos 6-vértices afins.

No capítulo **5** é apresentado uma breve introdução ao problema de Toeplitz sobre inscrever um quadrado numa curva de Jordan.

As referências bibliográficas não foram todas citadas no texto; algumas foram incluídas por abordarem temas relacionados à geometria, singularidades e topologia das curvas, na maioria, planas.

Estas notas foram usadas no minicurso ministrado pelos autores na VIII Bienal da SBM em abril de 2017 e na Escola de Singularidades do ICMC/USP em julho/2018.

Mário Jorge D. Carneiro
e Ronaldo A. Garcia

BH, GYN, julho 2018.

Capítulo 1

Curvatura de curvas planas

“Everyone knows what a curve is, until he has studied enough mathematics to become confused through the countless number of possible exceptions.”

“Thus, in a sense, mathematics has been most advanced by those who distinguished themselves by intuition rather than by rigorous proofs.”

– F. Klein (1849-1925).

Em seu famoso programa "Erlanger Programm" de 1872, F. Klein formulou uma definição para a geometria. Segundo este princípio, geometria é basicamente o estudo das propriedades dos objetos geométricos (figuras) que restam intactos quando os mesmos são submetidos as ações de um certo grupo de transformações geométricas. No caso da geometria euclidiana, as grandezas fundamentais que são preservadas por movimentos rígidos ou isometrias (rotações, reflexões e translações) são: distância entre dois pontos e ângulos entre duas retas. Na geometria diferencial métrica temos vários conceitos que caracterizam os objetos geométricos. Um bom exemplo é a noção de curvatura de curvas no plano euclidiano. E o fato fundamental é de que para determinar uma curva $\gamma(s) = (x(s), y(s))$, de classe C^2 , salvo movimentos rígidos, é suficiente conhecer uma única função $k(s)$, chamada a curvatura de γ .

Outro ponto importante a observar é de que todo conceito geométrico, para estar bem definido, deve ser independente de coordenadas. Mas, muitas vezes, é essencial escolher coordenadas naturais e adaptadas para expressar com maior síntese os conceitos. Neste minicurso o leitor ou leitora poderá observar em várias ocasiões este ponto de vista.

1.0.1 O que é curvatura?

Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^2 , uma curva regular, simples, parametrizada pelo comprimento de arco, isto é, $\|\gamma'(s)\| = 1$.

Se $T(s) = \gamma'(s)$ e $N(s)$ é o vetor unitário da normal escolhido de modo que $\{T, N\}$ forma uma base positiva de \mathbb{R}^2 então as fórmulas de Frenet são:

$$T'(s) = k(s)N(s), \quad N'(s) = -k(s)T(s). \quad (1.1)$$

A aplicação $s \mapsto T(s) \in \mathbb{S}^1$ é chamada indicatriz tangente da curva e a aplicação $s \mapsto N(s) \in \mathbb{S}^1$ é a aplicação normal de Gauss, que generaliza-se para o caso de hipersuperfícies.

Denotando por $T(s) = (\cos \varphi(s), \sin \varphi(s))$ o vetor unitário da tangente, $T'(s) = \varphi'(s)(-\sin \varphi(s), \cos \varphi(s))$

Definição 1. *Definição de Curvatura:* $k(s) = \varphi'(s)$.

Proposição 1. *Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular de classe C^k , $k \geq 2$, parametrizada por $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Então a curvatura de γ é dada por*

$$k(t) = \frac{x'y'' - x''y'}{((x')^2 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{[\gamma', \gamma'']}{|\gamma'|^3}, \quad (1.2)$$

onde $[\gamma', \gamma'']$ é a área orientada do paralelogramo gerado por γ' e γ'' .

Demonstração. Exercício. □

Exemplo 1. *A curvatura de um círculo de raio r é igual a $\frac{1}{r}$.*

A curvatura da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, parametrizada por $\gamma(u) = (a \cos u, b \sin u)$, é igual a

$$\frac{ab}{(a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u)^{3/2}} = \frac{a^4 b^4}{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{3/2}}.$$

Usando a Fórmula de Taylor obtemos a seguinte forma normal local para curvas regulares planas (parametrizadas pelo comprimento de arcos s):

$$\gamma(s) = \gamma(s_0) + \gamma'(s_0)(s - s_0) + \gamma''(s_0) \frac{(s - s_0)^2}{2} + \gamma'''(s_0) \frac{(s - s_0)^3}{3!} + O(4).$$

Usando as Fórmulas de Frenet:

$$\begin{aligned} \gamma(s) = & \gamma(s_0) + [(s - s_0) + k(s_0) \frac{(s - s_0)^3}{3!}] T(s_0) + [k(s_0) \frac{(s - s_0)^2}{2} \\ & + k'(s_0) \frac{(s - s_0)^3}{3!}] N(s_0) + O(4). \end{aligned}$$

Definição 2. Um vértice de γ é um ponto de máximo local ou de mínimo local da curvatura.

No caso em que a curva é de classe C^3 um vértice é um ponto crítico de k , isto é, $k'(s_0) = 0$.

O objetivo dessas notas é discutir o seguinte

Teorema (Quatro vértices). Uma curva plana regular simples e fechada (curva de Jordan regular), contém pelo menos dois pontos distintos de máximo local e dois pontos distintos de mínimo local de k .

Observação 1. Uma curva de Jordan (curva fechada contínua e simples) divide o plano em duas regiões conexas, sendo uma limitada e outra não limitada. Para uma demonstração deste importante resultado no caso de curvas de classe C^2 veja [1, cap. 4].

A curvatura pode ser definida usando-se a noção de *contato entre curvas*. O traço de uma curva regular será denotado por γ e, neste texto, algumas vezes iremos confundir γ com o seu traço. Em geral, γ é tratado como objeto geométrico contido no plano, uma subvariedade uni-dimensional que possui uma métrica induzida pela métrica euclidiana do plano.

Definição 3. Duas curvas regulares planas α e β de classe C^∞ possuem contato de ordem m em um ponto $p = \alpha(s_0)$ se $\alpha(s_0) = \beta(s_0)$ e $\frac{d^j \alpha}{ds^j}(s_0) = \frac{d^j \beta}{ds^j}(s_0)$, para $j = 1, 2, \dots, m - 1$, mas $\frac{d^m \alpha}{ds^m}(s_0) \neq \frac{d^m \beta}{ds^m}(s_0)$.

Exemplo 2. Curvas que se intersectam possuem contato de ordem maior ou igual a zero. Curvas tangentes possuem contato de ordem maior ou igual a 1.

Exercício: Se uma das curvas, digamos β , é definida implicitamente por uma equação $F(x, y) = 0$, então α e β têm contato de ordem m em p se e somente se o primeiro termo não nulo da fórmula de Taylor da função composta $f(s) = F(\alpha(s))$ no ponto s_0 é o de grau m ou seja, a fórmula de Taylor da função composta $f(s) = F(\alpha(s))$ no ponto s_0 é: $\frac{f^{(m)}(s_0)(s-s_0)^m}{m!} + O(m+1)$.

1.0.2 Círculo Osculador.

Vejam como definir a curvatura em um ponto $p \in \gamma$ em termos de contato entre γ e círculos que passam p .

Começamos com uma pergunta: na família dos círculos tangentes a γ em $p \in \gamma$ qual é o círculo que possui maior ordem de contato com γ em p ?

Observe que círculos tangentes a γ em p são centrados na reta normal a γ em p . Trata-se de uma família parametrizada pelo centro do círculo ou seja, pelo raio r , distância do centro a p .

Para responder à pergunta, escrevemos a família de círculos parametrizada por r definida implicitamente como $F(z, r) = |z - (p + rN)|$, $r \neq 0$ e analisamos a função $f(s) = F(\gamma(s)) = |\gamma(s) - \gamma(s_0) - rN(s_0)|$.

A regra da cadeia, juntamente com a forma normal local implica que $f(s_0) = |r|$, $f'(s_0) = 0$ e

$$f''(s_0) = \frac{1 - k(s_0)r}{r}$$

Conclui-se assim que o contato da curva com o círculo é máximo se e somente se $k(s_0) = \frac{1}{r}$. Veja Fig. 1.1. Por essa razão definimos

Definição 4. O círculo osculador de γ em p é o círculo tangente a γ em p de raio $\frac{1}{|k(s_0)|}$. Ou seja, a equação do círculo osculador é:

$$\|z - \gamma(s_0) - \frac{1}{k(s_0)}N(s_0)\| = \frac{1}{|k(s_0)|}$$

O inverso do raio (raio de curvatura) do círculo osculador é a *curvatura* de γ .

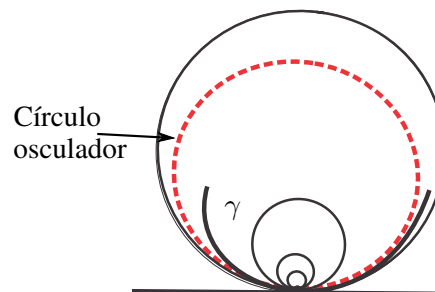


Figura 1.1: Círculo osculador e curvatura.

Relacionado com o problema acima temos as seguintes exercícios:

1. O que ocorre quando $k(s) = 0$?
2. Desenhe a família de círculos osculadores da curva (x, x^3) .
3. Usando a derivada terceira da função f definida acima, prove que se $\gamma(s_0)$ não é um vértice então existe uma vizinhança V de s_0 tal que o traço de γ em V atravessa o círculo osculador.

4. Prove que se um círculo de raio R tangente a γ em p contém (localmente) o traço de γ em seu interior então $|k(p)| > \frac{1}{R}$.

1.0.3 Arcos Monótonos.

Definição 5. (*Arco monótono*): Um arco de curva $J \in \gamma$ é dito monótono se a curvatura em J é uma função monótona, não decrescente ou não crescente.

Proposição 2. Em um arco monótono os círculos osculadores são encaixados.

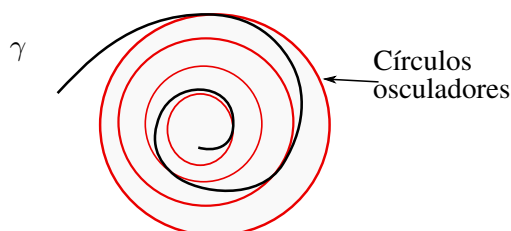


Figura 1.2: Círculos osculadores e arco monótono γ .

Demonstração. Dados dois discos $D_1 = D(p_1, r_1)$ e $D_2 = D(p_2, r_2)$ (centro p_i e raio r_i) temos que $\text{int}(D_1) \subset \text{int}(D_2)$ se, e somente se, $|p_2 - p_1| < r_2 - r_1$.

Suponha γ parametrizada pelo comprimento de arco s e considere a evoluta $\Gamma(s) = \gamma(s) + [1/k(s)]n(s)$ definida pelo centro dos círculos osculadores de γ . Temos que $\Gamma'(s) = r'(s)n(s)$, onde $r(s) = 1/k(s)$. Logo $|\Gamma(s_2) - \Gamma(s_1)| = |\int_{s_1}^{s_2} r'(s)n(s)ds| \leq \int_{s_1}^{s_2} |r'(s)|ds = |r(s_2) - r(s_1)|$. Tomando os discos $D_i = D_i(\Gamma(s_i), r(s_i))$ a desigualdade acima (supondo $r' > 0$) é precisamente a condição para $\text{int}D_1 \subset \text{int}D_2$. No caso $r' < 0$, temos que $\text{int}D_2 \subset \text{int}D_1$. Em qualquer situação obtemos que os círculos osculadores são encaixados. \square

Exercício: Prove que arcos monótonos são preservados por inversões no plano. Mais precisamente, seja $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $z \in \mathbb{C}$, uma transformação de Möbius tal que os pontos $z = \frac{-d}{c}$ e $z = \frac{-b}{a}$ não pertencem a γ . Se J é um arco monótono de γ então $f(J)$ é um arco monótono de $f(\gamma)$.

Sugestão: Transformações de Möbius levam círculos em círculos ou em retas e preservam o contato entre curvas, pois são difeomorfismos locais do plano e nas condições acima, a imagem de uma curva regular, também é uma curva regular.

Uma consequência interessante desta invariância é a localização de vértices.

Lema 1 (S. B. Jackson-1944). *Se um arco de curva regular simples $AB \subset \gamma$ não circular é tangente a um círculo \mathcal{C} , com a mesma orientação e nunca cruza este círculo então existe um vértice de γ no interior de AB .*

O vértice será um máximo local da curvatura se o círculo estiver no interior da região limitada pelo traço de γ . Será um mínimo local se estiver no exterior da curva.

Demonstração. Suponha que a intersecção do arco com o círculo \mathcal{C} seja igual a $\{A, B\}$. Tome um ponto z_0 no arco em \mathcal{C} complementar ao arco circular de A até B .

Considere uma transformação de Möbius que leva z_0 ao infinito e, portanto, leva \mathcal{C} sobre uma reta \mathcal{L} . A curva será enviada em uma outra curva γ_1 simples e tangente à reta \mathcal{L} em dois pontos A_1 e B_1 .

Segue da hipótese que o arco A_1B_1 em γ_1 está contido inteiramente em um dos semi-planos definidos por \mathcal{L} . Portanto, a curvatura de γ_1 nestes pontos tem mesmo sinal.

Afirmção: $\int_{A_1}^{B_1} k_{\gamma_1}(s)ds = 0$.

Se isso de fato ocorre, segue que a curvatura deve trocar de sinal no arco A_1B_1 . Por continuidade, deve haver um ponto de mínimo ou máximo local da curvatura, ou seja um vértice de γ_1 .

Mas as transformações de Möbius preservam arcos monótonos (e portanto vértices). Assim, usando a transformação inversa, vemos que γ apresenta um vértice no interior do arco AB .

Para provar a *Afirmção* basta calcular a integral da curvatura da curva C^2 por partes formada pelo arco A_1B_1 em γ_1 seguido do segmento de reta liga A_1 a B_1 . A curvatura total desta curva é zero. Como a curvatura no segmento de reta é nula, segue que a curvatura total de γ_1 no arco A_1B_1 é zero. \square

Proposição 3 (S. B. Jackson). *Seja γ uma curva plana, contínua fechada e simples (de Jordan) que delimita uma região \mathcal{R} simplesmente conexa. Suponha que A_1, A_2 e A_3 sejam três arcos que dividem γ . Então existe um círculo contido em \mathcal{R} que possui um ponto de tangência com cada um dos arcos.*

Outra maneira de dizer, existe um ponto no interior de \mathcal{R} equidistante dos três arcos.

Demonstração. Reproduzimos a prova dada por Jackson em [47], por ele atribuída a P. Erdős. Defina $D_i = \{z \in \mathcal{R} \mid \text{dist}(z, A_i) \leq \text{dist}(z, A_j), j \neq i\}$. É claro que $D_1 \cup D_2 \cup D_3 = \mathcal{R}$.

Basta provar que $D_1 \cap D_2 \cap D_3 \neq \emptyset$, pois um ponto nesta intersecção é equidistante aos três arcos.

Afirmção: D_i é fechado e conexo.

É fechado por que é definido por desigualdades e cada arco é um subconjunto fechado.

D_j é, de fato, conexo por caminhos. Para ver isso, sejam z_1 e z_2 dois pontos quaisquer de D_j . Tome pontos $a_1, a_2 \in D_j$ tais que $d(z_i, \mathcal{A}_j) = \|z_i - a_i\|$, $i = 1, 2$. Então, segue imediatamente da definição dos subconjuntos que a curva contínua por partes formada pelo segmento de reta entre z_1 e a_1 , o subarco de a_1 a a_2 e o segmento entre a_2 e z_2 é um caminho em D_j . Temos que $D_i \cap D_j \neq \emptyset$, pois cada um desses arcos têm um ponto em comum (uma extremidade) com o outro. Portanto, $D_i \cup D_j$ é um subconjunto fechado e conexo de \mathcal{R} .

Suponha, por absurdo, que $D_1 \cap D_2 \cap D_3 = \emptyset$. Assim, a intersecção de D_1 com $D_2 \cup D_3$ são dois subconjuntos fechados, $D_1 \cap D_2$ e $D_1 \cap D_3$ conexos por caminhos e disjuntos cuja união é simplesmente conexa. O que nos dá uma contradição. \square

Observe que ao menos dois dos três pontos de tangência são distintos. Portanto, usando o círculo tri-tangente e o teorema anterior, obtemos uma prova do Teorema dos Quatro Vértices para curvas de classe C^2 .

Em resumo, círculos inscritos ou circunscritos bitangentes dão origem a vértices. Mais adiante veremos como R. Osserman usa este fato para contar os vértices de uma curva usando o círculo circunscrito.

Círculos bitangentes são usados na prova do TQV dada por Guggenheimer (1969). Vértices são obtidos como pontos limites de pares de pontos de bitangência.

Um círculo de bitangência a γ nos pontos $\gamma(s_0)$ e $\gamma(s_1)$ define localmente um eixo de simetria da curva. Basta tomar a reta que passa pelo centro do círculo e pelo ponto de intersecção das retas tangentes a γ em $\gamma(s_0)$ e $\gamma(s_1)$. O que ocorre se essas retas são paralelas?

Uma outra prova do TQV, conforme descreve R. Thom, [87, pag. 205], foi sugerida por Alan Weinstein que usa círculos inscritos bitangentes à curva, ou melhor, o lugar dos centros dos círculos de bitangência ou *Conjunto de Simetria* da curva.

1.0.4 Curvas Convexas.

Definição 6. *Uma curva regular $\gamma(s)$ é convexa se para todo ponto s_0 o traço da curva está contido em um dos semiplanos fechados determinados pela reta tangente à curva no ponto γ .*

Usando a equação da reta tangente, dada por $\langle z - \gamma(s_0), N(s_0) \rangle = 0$ vemos que $\gamma(s)$ é convexa se $\forall s_0$ a função $h(s) = \langle \gamma(s) - \gamma(s_0), N(s_0) \rangle$ não muda de sinal. Como $h(s_0) = 0, h'(s_0) = 0, h''(s_0) = k(s_0)$, temos que se $k(s) \neq 0$ então γ é localmente convexa. Mas se h muda de sinal em algum ponto, então existe um terceiro ponto $s_0 < s_1$ tal que $h'(s_1) = 0$. Ou seja $T(s_1) = T(s_0)$. Pelo Teorema do Valor Médio existe $s_0 < s_2 < s_1$ tale que $T'(s_2) = k(s_0)N(s_0) = 0$, uma contradição.

Pergunta: vale a recíproca?

Uma curva convexa de curvatura não nula é chamada *estritamente convexa*.

Exercício: Prove que uma curva regular, simples e fechada é uma curva convexa se a região fechada \mathcal{R} limitada pelo traço de γ é um subconjunto convexo de \mathbb{R}^2 . Isto é, $\forall z_1, z_2 \in \mathcal{R}$ o segmento de reta $[z_1, z_2] = tz_1 + (1-t)z_2, 0 \leq t \leq 1$, está contido em \mathcal{R} .

Seja $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva de classe C^2 fechada, simples e estritamente convexa parametrizada por comprimento de arco s . $T(s)$ denota o vetor tangente, então $T(s) = (\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s)))$ com $\theta(s) - \theta(0) = \int_0^s k(u)du$.

Por ser fechada, temos $\theta(L) - \theta(0) = 2\pi n$. Como γ é estritamente convexa, $n = 1$ pois, caso contrário, teríamos pontos distintos $s_0 \neq s_1$ tais que $T(s_0) = T(s_1)$. Isso implica a existência de um ponto tal que $k(s) = 0$, o que é um absurdo.

Isto significa que $\theta : [0, L] \rightarrow [0, 2\pi]$ é um difeomorfismo de classe C^1 e que, portanto, toda curva estritamente convexa pode ser parametrizada pelo ângulo θ que a sua tangente faz com uma direção fixa.

Escrevendo $\gamma_1(\theta) = \gamma(s(\theta))$, a priori uma curva de classe C^1 , temos:

$$\gamma_1'(\theta) = \gamma'(s(\theta)) \frac{ds}{d\theta} = \gamma'(s(\theta)) \frac{1}{k(s(\theta))} = \frac{1}{k(s(\theta))} T(s(\theta))$$

e

$$T'(s(\theta)) \frac{ds}{d\theta} = k(s(\theta)) \frac{1}{k(s(\theta))} N(s(\theta)) = N(s(\theta)).$$

Analogamente

$$N'(s(\theta)) = -T(s(\theta)).$$

Em resumo, se uma curva convexa $\beta(\theta)$ está parametrizada pelo ângulo θ que a tangente faz com uma direção fixa, então: $\beta'(\theta) = R(\theta)T(\theta), T'(\theta) = N(\theta), N'(\theta) = -T(\theta)$.

1.1 Envelope de retas e evoluta de uma curva.

Uma família de retas a um parâmetro no plano \mathbb{R}^2 é chamada na literatura clássica de congruência de retas. Na forma cartesiana podemos representar esta família pela equação

$$R(x, y, u) = a(u)x + b(u)y + c(u) = 0, \quad a(u)^2 + b(u)^2 \neq 0. \quad (1.3)$$

Suporemos que as funções envolvidas são de classe C^k , $k \geq 3$.

Genericamente, pelo Teorema de Sard, a equação $R(x, y, u) = 0$ define uma superfície em \mathbb{R}^3 e sua projeção $\pi(x, y, u) = (x, y)$ no plano é singular, isto é, não é uma submersão, quando $R_u(x, y, u) = 0$.

O conjunto definido por $\mathcal{C} = \{(x, y, u) : R(x, y, u) = R_u(x, y, u) = 0\}$ é chamado de *criminante*.

A projeção da curva definida por $R = R_u = 0$ é definida como sendo o envelope da congruência de retas. É também denominado de *discriminante*.

Um cálculo direto nos mostra que o envelope é dado por

$$x(u) = \frac{bc' - cb'}{ab' - ba'}, \quad y(u) = \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'} \quad (1.4)$$

Exemplo 3. Considere a família de retas $\cos ux + \operatorname{senu}y = c$. O seu envelope é o círculo $\gamma(u) = c(\cos u, \operatorname{senu})$.

O envelope da família de retas $\cos u x + \operatorname{senu} y = h(u)$ é dado por $E(u) = h(u)(\cos u, \operatorname{senu}) + h'(u)(-\operatorname{senu}, \cos u)$.

Exemplo 4. A congruência de retas $R(x, y, u) = x - uy + \frac{c}{6}u^3 = 0$ possui envelope $E(u) = (\frac{c}{3}u^3, \frac{c}{2}u^2)$. Veja Fig. 1.3.

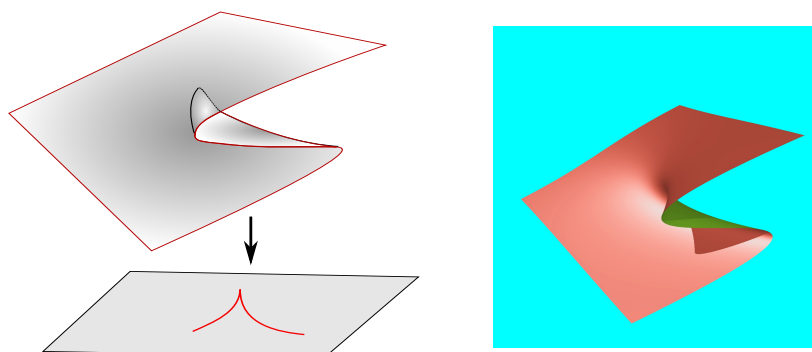


Figura 1.3: Envelope e ponto de cúspide.

Exemplo 5. Uma família a um parâmetro de retas na forma paramétrica se escreve como $x = x_0(t) + va(t)$, $y = y_0(t) + vb(t)$. Logo o seu envelope $E(t) = (x(t), y(t))$ está definido por:

$$x(t) = \frac{a(x'_0b + x_0b') - a'bx_0 - a^2y'_0}{ab' - ba'}$$

$$y(t) = \frac{a(y_0b' - y'_0b) - a'by_0 + b^2x'_0}{ab' - ba'}.$$

Dada uma curva regular, $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$, parametrizada por comprimento de arco s , de classe C^2 consideramos a família a um parâmetro de retas normais a γ

$$\Gamma(s, t) := \gamma(s) + tN(s).$$

O envelope desta família de retas normais, é também caracterizado pela condição $[\Gamma_s, \Gamma_t] = 0$, onde $\Gamma_s = (\partial\Gamma/\partial s)$, $\Gamma_t = (\partial\Gamma/\partial t)$ e $[w, r]$ é o determinante da matriz formada pelos vetores w e r , é chamado a *cáustica* ou *evoluta* de γ . Veja [2, Cap. 3], [5, pág. 305], [8, Cap. 5]. Fazendo os cálculos obtemos que a cáustica de γ é dada por:

$$E(s) = \gamma(s) + \frac{1}{k(s)}N(s).$$

A evoluta é portanto o lugar dos centros dos círculos osculadores a curva γ . Nos vértices de γ , isto é, $k'(s) = 0$ temos que a curva E não é regular, isto é $E'(s) = 0$. Estes pontos são chamados *singulares* ou *cúspides*. Um ponto de cúspide $E(s_0)$ é chamado simples ou de primeira ordem se $k'(s_0) = 0$ e $k''(s_0) \neq 0$.

Para uma curva de classe C^3 , pontos singulares da evoluta correspondem aos vértices da curva.

Exercício: Utilizando a projeção $g(s) = \langle E(s) - \gamma(s_0), N(s_0) \rangle$, faça um esboço da evoluta em uma vizinhança de um vértice correspondente a curvatura máxima e em uma vizinhança de um vértice de curvatura mínima. No primeiro caso, o raio que liga o centro de curvatura ao vértice está no exterior da evoluta, enquanto no segundo, este raio está no interior.

Proposição 4. Na vizinhança de um ponto de cúspide de primeira ordem a congruência de retas normais possui dois comportamentos.

i) Se for um ponto de mínimo da curvatura ($k'(s_0) = 0$, $k''(s_0) < 0$) a família de segmentos normais $[\gamma(s), E(s)]$, tangentes a E , são disjuntos, definindo uma folheação singular tendo a evoluta como envelope. Veja Fig. 1.4, direita.

ii) Se for um ponto de máximo da curvatura ($k'(s_0) = 0, k''(s_0) > 0$) a família de segmentos normais $[\gamma(s), E(s)]$, tangentes a E , definem uma rede singular na região interior a evoluta. Veja Fig. 1.4, esquerda.

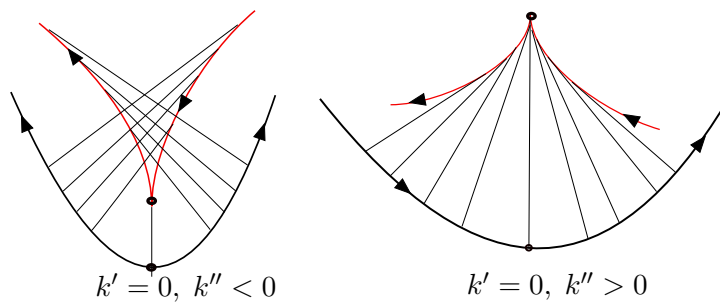


Figura 1.4: Cúspides associados a pontos extremais da curvatura.

Demonstração. Na vizinhança de um vértice podemos parametrizar a curva γ como um gráfico $\gamma(u) = (u, \frac{k}{2}u^2 + \frac{a}{24}u^4 + O(5))$. A curvatura de γ é dada por $k(u) = k + \frac{1}{2}(a - 3k^3)u^2 + O(3)$. Logo a evoluta de γ é parametrizada por

$$E(u) = \left(\frac{(a - 3k^3)}{3k}u^3 + O(4), \frac{1}{k} + \frac{(a - 3k^3)}{2k^2}u^2 + O(3) \right)$$

$$= \left(0, \frac{1}{k}\right) + (a - 3k^3) \left(\frac{u^3}{3k} + O(4), \frac{u^2}{2k^2} + O(3) \right)$$

Fazendo a análise da evoluta nos dois casos $k'(0) = a - 3k^3 \neq 0$ segue o resultado. Observamos que percorrendo a curva γ no sentido anti-horário a evoluta é percorrida no sentido horário. Veja Fig. 1.4. □

Observação 2. Na região interior ao ponto de cúspide a congruência de retas normais a uma curva regular define uma 3-teia (3-web) tendo como envelope a evoluta. Veja Fig. 1.5.

Um ponto singular $s = s_0$ de uma curva E , de classe C^∞ , é um ponto de cúspide de primeira ordem se $E'(s_0) = 0$ e $[E''(s_0), E'''(s_0)] \neq 0$. Quando E for a evoluta de uma curva este conceito corresponde a vértices.

Observamos que a definição de cúspide acima não depende da parametrização considerada. Na vizinhança de um ponto de cúspide simples ou de primeira ordem a curva tem a seguinte forma normal

$$(x(t), y(t)) = (at^2, bt^3).$$

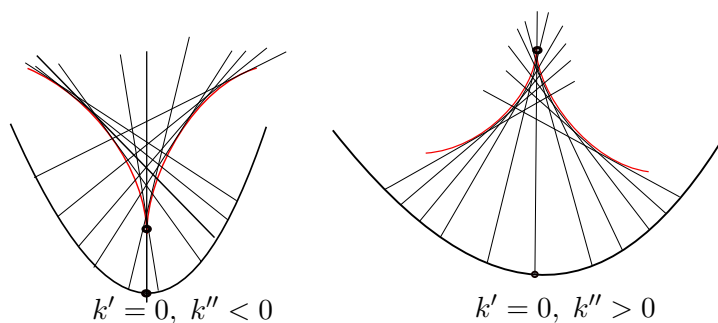


Figura 1.5: Teia associada a pontos de cúspides.

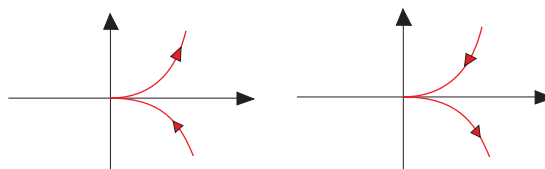


Figura 1.6: Ponto de cúspide e orientação da curva

Nas cônicas (hipérbole, elipse e parábola) o conjunto focal possui singularidades do tipo cúspide. Veja Fig. 1.7.

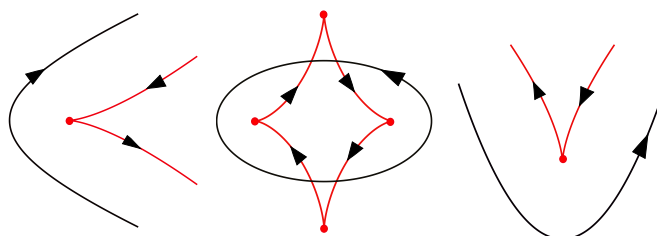


Figura 1.7: Conjunto focal (cáustica) da hipérbole (esquerda), elipse (centro) e parábola (direita).

Em S. Tabachnikov. *The four vertex theorem revisited – two variations on the old theme*, Amer. Math. Monthly 102 (1995), 912–916 encontramos uma prova do TQV para o caso genérico em que a curvatura é uma função de Morse, isto é, todos os seus pontos críticos são não degenerados. Os vértices são pontos de máximo ou mínimo com derivada segunda não nula.

Neste caso, a evoluta possui um ponto de cúspide de primeira ordem corre-

pondente a cada um dos vértices. Contar vértices, portanto, é contar cúspides da evoluta.

Teorema 1. *Seja γ uma curva de Jordan regular, estritamente convexa e suponha que $[\gamma''(s), \gamma'''(s)] \neq 0$ para todo s . Então o envelope da família de retas $\gamma(t) + v\gamma''(t)$ possui pelo menos 4 pontos de cúspides de primeira ordem.*

Observação 3. A hipótese do teorema acima depende da parametrização de γ . No caso em que a curva está parametrizada por comprimento de arco a condição $[\gamma''(s), \gamma'''(s)] \neq 0$ para todo s significa que c é estritamente convexa.

Demonstração. Primeiro observamos que todo $p \in \mathbb{R}^2$ pertence a uma reta tangente a cáustica E , ou seja, p pertence a alguma reta normal à curva γ . Em outras palavras, a aplicação $(t, s) \mapsto \gamma(s) + tN(s)$ é sobrejetora. De fato, considere a função $f(s) = [\gamma(s) - p, \gamma'(s)]$. Esta função assume o máximo em s_0 . Logo, $f'(s_0) = [\gamma(s_0) - p, \gamma''(s_0)] = 0$ e portanto os vetores $\gamma(s_0) - p$ e $\gamma''(s_0)$ são colineares. Isto significa que p pertence à reta tangente à cáustica $\gamma(s_0) + t\gamma''(s_0)$.

Considere a função $\phi : \mathbb{R}^2 \setminus \gamma \rightarrow \mathbb{N}$ cujo valor $\phi(p)$ é o número de retas tangentes a γ que passa por p . Esta função é constante em cada componente conexa do domínio. Uma curva regular de curvatura não constante, o número de pontos de intersecção de retas tangentes decresce de dois ao atravessarmos a curva da parte côncava para a parte convexa. De fato, convexidade significa que a curva situa-se inteiramente em um dos semi-planos definidos pela reta tangente. Assim o valor de ϕ decresce de dois quando cruzamos a evoluta de uma componente localmente côncava para uma localmente convexa. Além disso, para p na região exterior à curva $\phi(p) = 2$, pois a correspondência $s \mapsto N(s)$ é injetiva.

Suponhamos que E possua somente dois pontos de cúspides, $E(s_1)$ e $E(s_2)$, conforme Fig. 1.8. Tomemos a reta \mathcal{L} que passa $E(s_1)$ e $E(s_2)$. A função altura em relação a \mathcal{L} , assume um máximo num ponto fora das duas cúspides, ou seja, em um ponto regular da cáustica, veja Fig. 1.8. Lembre que a função altura é a restrição a E da projeção ortogonal a direção de \mathcal{L} .

Logo, pela convexidade, imediatamente abaixo do ponto de máximo temos $\phi(p) = 0$. Isto contradiz a primeira afirmação demonstrada. \square

1.2 Exercícios.

1.1. Considere uma curva parametrizada por $\gamma(\theta) = r(\theta)(\cos \theta, \sin \theta)$.

i) Mostre que sua curvatura é dada por

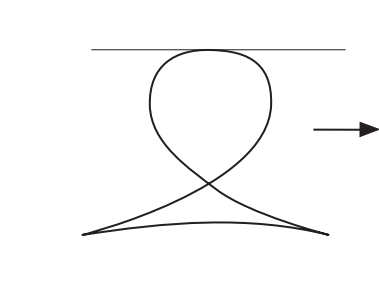


Figura 1.8: Função altura e cúspides

$$k = \frac{r^2 + 2(r')^2 - rr''}{(r^2 + (r')^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

- ii) Parametrize a lemniscata de Bernoulli definida pela equação $|PF_1| \cdot |PF_2| = c^2$, $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$ em coordenadas polares e calcule a sua curvatura.
- iii) Mostre que a lemniscata de Bernoulli é uma curva algébrica de grau 4 definida por $H(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = 0$.
- iv) Analise a quantidade de vértices da curva implícita $H(x, y) = a$ para $a \in \mathbb{R}$.

1.2. (Projeto). Investigue o seguinte tema sobre vértices de curvas abertas sendo gráficos polinomiais. Veja [19].

Considere a curva plana Γ definida pelo gráfico $\{(x, p(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ de um polinômio $p \in \mathbb{R}[x]$ de grau n .

- i) Mostre que os vértices de Γ , i. e., pontos críticos da curvatura, é definido pelos zeros de $Q = 3p'p'' - (1 + (p')^2)p'''$, polinômio de grau $3n - 5$.
- ii) Mostre que se p tem grau 3 então Γ tem no máximo 2 vértices. Dê exemplo de um polinômio de grau 3 com Γ possuindo 2 vértices.
- iii) Mostre que se p'' tem todos zeros reais, então Γ possui no máximo $n - 1$ vértices.
- iv) Analise a seguinte conjectura proposta em [19]. “A curva Γ possui no máximo $n - 1$ vértices”.
- v) Faça vários exemplos e estabeleça resultados sobre a quantidade mínima de vértices para a curva Γ .

1.3. O objetivo deste exercício é apresentar vários tópicos de curvas planas, em especial das curvas de largura constante. Para mais informações veja [1], [23], [61], [91].

1.2. EXERCÍCIOS.

19

i) Mostre que $p(\theta) = a \cos^2(3\theta/2) + b$ é uma função, 2π -periódica, tal que $p(\theta) + p(\theta + \pi) = a + 2b = cte$. Construa outros exemplos.

ii) Mostre que a curva $c(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$, definida por

$$x(\theta) = p(\theta) \cos \theta - p'(\theta) \operatorname{sen} \theta, \quad y(\theta) = p(\theta) \operatorname{sen} \theta + p'(\theta) \cos \theta$$

é o envelope da família de retas $x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta = p(\theta)$, chamadas retas suportes. Interprete geometricamente.

iii) Calcule a curvatura de $c(\theta)$ e demonstre o teorema dos quatro vértices para curvas convexas usando a função suporte $p(\theta)$.

iv) Mostre que $x(\theta) = 9 \cos \theta + 2 \cos 2\theta - \cos 4\theta$, $y(\theta) = 9 \operatorname{sen} \theta - 2 \operatorname{sen} 2\theta - \operatorname{sen} 4\theta$ tem largura constante e calcule seus vértices. A largura $w(\theta)$ de uma curva convexa numa direção $N(\theta) = (\cos \theta, \operatorname{sen} \theta)$ é a distância entre as duas retas suportes perpendiculares a $N(\theta)$.

v) Mostre que a curva definida no item iv) é uma curva algébrica $f(x, y) = 0$, sendo f um polinômio de grau 8.

vi) Mostre que o comprimento de uma curva de largura constante $\lambda > 0$ é $\lambda\pi$.

vii) Dentre todas as curvas convexas de largura λ mostre que o círculo delimita uma região de área máxima e o triângulo de Reuleaux delimita a região de área mínima.

viii) Calcule explicitamente a evoluta $c_e(\theta)$ de $c(\theta)$ usando a parametrização definida no item ii). Mostre que se c for convexa então

$$\int_c \frac{1}{k} ds = 2\pi(F_c - F_e)$$

onde F_c é a área da região delimitada por c e F_e é a área algébrica da região delimitada pela evoluta c_e .

A área algébrica da região delimitada por uma curva Γ definida pelo envelope de uma família de retas $x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta = h(\theta)$ é dada por

$$F_\Gamma = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} h(\theta)[h(\theta) + h''(\theta)] d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [h^2 - h'^2] d\theta.$$

ix) Seja $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^r , $r \geq 2$, uma curva simples não fechada, parametrizada por comprimento de arco s . Suponha que $\gamma(L) - \gamma(0)$ seja ortogonal a $\gamma'(L) = -\gamma'(0)$ e que $k(s) \geq 1/\lambda$ para $s \in [0, \lambda]$ onde $\lambda = |\gamma(L) - \gamma(0)|$. Então existe uma curva fechada de largura constante $\Gamma : [0, \pi\lambda] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\Gamma(s) = \gamma(s)$ para todo $s \in [0, L] \subset [0, \lambda\pi]$.

1.4. Considere 3 pontos distintos $p_i = (x_i, y_i)$ no plano \mathbb{R}^2 e defina a função

$$h(p) = |p - p_1| + |p - p_2| + |p - p_3|.$$

i) Mostre que $h(p) = c$ define uma curva, denominada 3-elipse, a qual delimita uma região convexa para todo $c > c_0 = \min(h)$. Determine c_0 .

ii) Esboce as curvas de níveis de h e analise os vértices da curva implícita $h(p) = c$.

1.5. Explique por que o conceito de curvatura está associado à forma geométrica da imagem da curva parametrizada. Mais formalmente: seja $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ é uma curva regular, isto é, Γ é a imagem de uma curva parametrizada regular $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$. Se $p = \gamma(t_0) \in \Gamma$, então definimos a curvatura de Γ em p por $k_\Gamma(p) = k_\gamma(t_0)$. Prove que se $\alpha(u)$ é outra curva parametrizada cuja imagem é igual a Γ , com $p = \alpha(u_0)$, então $k_\alpha(u_0) = k_\gamma(t_0)$.

1.6. Prove que se $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma isometria do plano euclidiano e Γ é uma curva regular, então $A(\Gamma)$ é uma curva regular com mesma curvatura.

1.7. O Teorema Fundamental das Curvas Planas ([11]) diz que, a menos de uma isometria plana, a função curvatura determina a curva regular localmente. Explique o que isso significa.

1.8. Prove que se uma curva parametrizada regular é fechada e tem comprimento L então a curvatura é uma função periódica. Qual é a relação entre o período da curvatura e o comprimento L ?

1.9. Prove que se k é a curvatura de uma curva regular fechada de comprimento L , $k(s + L) = k(s)$, então

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^L k(s) ds = m \in \mathbb{Z}.$$

1.10. Prove que se uma curva regular fechada é simples então

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^L k(s) ds = \pm 1$$

1.11. Na década de 1980, Gage e Hamilton desenvolveram a teoria do fluxo por curvatura de curvas planas. Em dimensão mais alta, esta teoria foi generalizada para outros fluxos geométricos, em particular o Fluxo de Ricci, importante na prova da Conjectura de Poincaré. Uma família $X(u, t)$ de curvas planas fechadas satisfaz a equação do fluxo de curvatura se

$$\frac{\partial X(u, t)}{\partial t} = k(u, t)N(u, t)$$

Em geral, u não é o parâmetro comprimento de arco. Tomemos o parâmetro $u \in \mathbb{S}^1$ (modulo 2π).

Prove que se $A(t)$ é a área da região delimitada pela curva $X(u, t)$ (t fixo), então $A'(t) = -2\pi$. Portanto a área converge monotonamente a 0 em um tempo $T = \frac{A(0)}{2\pi}$.

Sugestão: siga os passos:

i) Mostre que se $v(u, t) = |X'(u, t)| = \frac{ds}{du}$ então $\frac{dv}{dt} = -k^2v$, X' denota a derivada em relação ao parâmetro da curva u .

ii) Prove que $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k'(u, t)}{v} N(u, t)$ e $\frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{k'(u, t)}{v} T(u, t)$.

iii) Prove que

$$A(t) = \frac{1}{2} \int_X xdy - ydx = -\frac{1}{2} \int_X \langle X, N \rangle ds = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \langle X, vN \rangle du.$$

iv) Use os itens anteriores e integração por partes para concluir que

$$A'(t) = - \int_0^{2\pi} kvdu = -2\pi.$$

1.12. Considere uma curva convexa regular no plano. Mostre que existe $p_0 \in \text{int}(\gamma)$ e quatro semirretas normais a γ passando por p_0 .

1.13. i) Dê exemplo de uma curva de classe C^0 por partes, delimitando uma região convexa, com curvatura constante e que não seja circular.

ii) Mostre que não é possível construir exemplos com no item i) supondo curvas de classe C^1 .

1.14. Sejam A_1 e A_2 dois conjuntos no plano tais que ∂A_1 e ∂A_2 sejam curvas convexas γ_1 e γ_2 de classe C^3 positivamente orientadas. Defina $C(A_1, A_2) = \{p \in \mathbb{R}^2 : d(p, A_1) = d(p, A_2)\}$ o conjunto equidistante (ou de conflito), onde $d(p, A_i) = \inf\{|p - p_i|, p_i \in A_i\}$.

i) Dado $p \in C(A_1, A_2)$, mostre que

$$k(p) = \frac{1}{2} \text{sen} \phi \left(\frac{k_1}{1 + rk_1} - \frac{k_2}{1 + rk_2} \right),$$

onde $r = d(p, A_i)$, k_i são as curvaturas nos pontos definidos implicitamente por $|p - p_i| = r$ e ϕ é o ângulo entre os vetores normais correspondentes, veja Fig. 1.9.

Sugestão: Mostre que $n = \frac{n_1 - n_2}{2 \text{sen} \phi}$ e $t = -\frac{n_1 + n_2}{2 \text{cos} \phi}$.

ii) Calcule o conjunto de conflito entre dois círculos disjuntos e conclua que a elipse, a parábola e um ramo de hipérbole podem ser descritas como conflitos.

iii) Calcule o conjunto de conflito entre a elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ e a parábola $y = kx^2 + r$. O conjunto de conflito é regular na vizinhança do ponto $(0, (r+b)/2)$? Justifique.

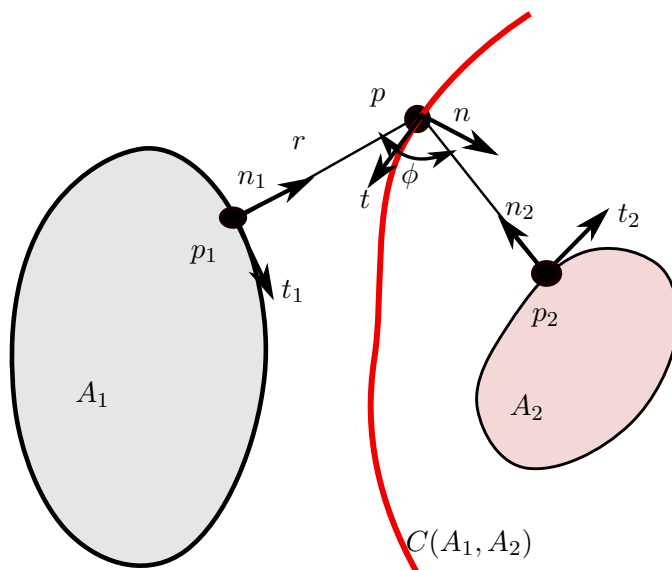


Figura 1.9: Conjunto de conflito entre dois convexos.

iv) Dado $p \in \mathbb{R}^2$ defina $F(p) = d(p, A_1)/d(p, A_2)$. Esboce as curvas de níveis de F supondo A_i cônicas no plano. Faça vários exemplos ilustrando esta folheação por curvas de níveis. Estude os artigos [73] e [77].

1.15. Considere uma curva regular definida implicitamente por $h(x, y) = 0$.

i) Mostre que sua evoluta (X, Y) é parametrizada por

$$X = x + \frac{h_x(h_x^2 + h_y^2)}{2h_x h_y h_{xy} - h_y^2 h_{xx} - h_x^2 h_{yy}}, \quad Y = y + \frac{h_y(h_x^2 + h_y^2)}{2h_x h_y h_{xy} - h_y^2 h_{xx} - h_x^2 h_{yy}}$$

ii) Mostre que se $h(x, y) = 0$ é uma curva algébrica, então a sua evoluta também é algébrica.

iii) Mostre que a evoluta da elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ é dada por

$$X = \frac{(a^2 - b^2)x^3}{a^2}, \quad Y = -\frac{(a^2 - b^2)y^3}{b^2}.$$

Conclua que a evoluta da elipse é definida por uma equação algébrica $H(X, Y) = 0$ de grau 6. Analise as curvas de níveis de H .

iv) Calcule os vértices da evoluta da elipse.

1.16. Calcule o envelope da congruência de retas definida por:

$$R(x, y, u) = (-r \operatorname{sen}(u + c) + \sin(u))x + (-\cos(u) + r \cos(u + c))y + \operatorname{sen}(c)r.$$

Interprete geometricamente o resultado.

1.17. i) Defina a curvatura geodésica de uma curva regular contida em uma superfície regular S em \mathbb{R}^3 .

ii) Mostre que quando a curvatura gaussiana da superfície S é variável não é esperado que a curvatura geodésica de círculos geodésicos possua quatro pontos críticos. Veja [29] e [47].

1.18. Considere 5 retas L_i definidas por $L_i(x, y) = a_i x + b_i y + c_i = 0$ em posição ao geral no plano \mathbb{R}^2 .

i) Encontre uma cônica \mathcal{C} tendo as 5 retas como retas tangentes a \mathcal{C} .

ii) Analise a geometria das curvas C_λ definidas por $L = L_1 L_2 L_3 L_4 L_5 = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

1.19. Considere um gráfico $\Gamma(x) = (x, h(x))$ tal que $h(0) = 0$, $h'(0) = 0$, $h''(0) > 0$. Considere, numa vizinhança da origem, três pontos distintos $p_1 = (x_1, h(x_1))$, $p_2 = (0, 0)$ e $p_3 = (x_3, h(x_3))$.

i) Calcule o círculo contido na região $\{(x, y) : y > 0\}$ e tangente as três retas tangentes ao gráfico passando pelos pontos p_i .

ii) Seja $R(x_1, x_3)$ o raio do círculo obtido no item i). Mostre que

$$\lim_{(x_1, x_3) \rightarrow (0, 0)} R(x_1, x_3) = \frac{1}{h''(0)}.$$

iii) Em que condições o círculo calculado no item i) passa pela origem? Justifique.

Capítulo 2

Teorema dos Quatro Vértices

“Mathematical science is in my opinion an indivisible whole, an organism whose vitality is conditioned upon the connection of its parts.”

“The art of doing mathematics consists in finding that special case which contains all the germs of generality.”

– D. Hilbert (1862-1943).

2.1 Provas do TQV.

Nesta Seção apresentaremos várias provas do Teorema dos Quatro Vértices ressaltando as ideias mais importantes que permitem aprofundar o entendimento das curvas regulares simples e fechadas.

As provas apresentadas nesta Seção utilizam propriedades elementares de funções periódicas definidas a partir de situações geométricas.

2.1.1 Prova Analítica.

Iniciamos com uma prova bem curta e elegante apresentada por H. W. Guggenheimer [37] para o caso de curvatura positiva (curva estritamente convexa).

Vimos que uma curva estritamente convexa pode ser parametrizada pelo ângulo que o seu vetor tangente $T(\theta)$ faz com uma direção fixa. Se a curva tem comprimento L então, $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{k(\theta)} = L$. Se $N(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$, então $\int_0^{2\pi} \frac{1}{k(\theta)} N(\theta) d\theta = 0$. Para ver isso, basta lembrar que $k(\theta) = \frac{d\theta}{ds}$.

Considere a função $f(\theta) = \frac{1}{k(\theta)} - \frac{L}{2\pi}$. Então os pontos críticos de f coincidem com os pontos críticos de k , isto é, os vértices da curva. Para encontrar os

vértices, a ideia é provar que f troca de sinal pelo menos quatro vezes. Pelo Teorema do Valor Médio, isto implica que f tem pelo menos quatro pontos críticos ou vértices da curva. Observe que f satisfaz às hipóteses da seguinte proposição:

Proposição 5. *Seja $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ periódica com média zero $\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta = 0$ e $\int_0^{2\pi} f(\theta)N(\theta)d\theta = 0$. Logo, f se anula pelo menos quatro vezes.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que f só troque de sinal nos pontos θ_0 e θ_1 . Por exemplo, suponha que $f(\theta) \geq 0$ para $\theta_0 < \theta < \theta_1$ e que $f(\theta) < 0$ para $\theta_1 < \theta < \theta_0 + 2\pi$.

Vamos usar agora que $\int_0^{2\pi} f(\theta)N(\theta)d\theta = 0$. Observe que esta condição não se altera se fizermos uma translação qualquer $Z(\theta) = N(\theta) + P$. Portanto, não há perda de generalidade ao supor que o segmento de reta entre $Z(\theta_0) = N(\theta_0) + P$ e $Z(\theta_1) = N(\theta_1) + P$ contém a origem com $\int_0^{2\pi} f(\theta)Z(\theta)d\theta = 0$.

Escreva

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)Z(\theta)d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} f(\theta)Z(\theta)d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_0+2\pi} |f(\theta)| \cdot (-Z(\theta))d\theta$$

As duas parcelas têm o mesmo sinal, pois correspondem a curvas no plano situadas no mesmo semi-plano definido pela reta que passa pela origem e contém os pontos $Z(\theta_0)$ e $Z(\theta_1)$. Isto segue do fato de que se $\int_a^b v(t)dt = 0$ então para qualquer vetor constante w , $\int_a^b \langle v(t), w \rangle dt = 0$. Escreva $v(t) = (x(t), y(t))$ de modo que a integral de cada componente se anula e use a linearidade para concluir o resultado. Tomando w vetor normal a corda, obtemos uma contradição. \square

2.1.2 Função suporte.

Continuando com a hipótese de convexidade estrita, vamos agora dar uma prova que usa a função suporte.

Dados uma curva regular convexa γ , com raio de curvatura $r(\theta)$, e um ponto $z \in \mathbb{R}^2$ no interior da região compacta \mathcal{R} limitada pelo traço de γ , definimos a *função suporte* associada a z por

$$h_z(\theta) = -\langle \gamma(\theta) - z, N(\theta) \rangle.$$

A escolha do ponto z não é relevante para o estudo de propriedades geométricas e, por translação, podemos supor que $z = 0 = (0, 0)$. Denotamos $h_0 = h$.

Note que $h'(\theta) = \langle \gamma(\theta), T(\theta) \rangle$ de modo que podemos escrever

$$\gamma(\theta) = h'(\theta)T(\theta) - h(\theta)N(\theta).$$

Além disso, o raio de curvatura pode ser obtido diretamente de h , pois $h''_z(\theta) = R(\theta) + \langle \gamma(\theta), N(\theta) \rangle = R(\theta) - h(\theta)$.

Ou

$$h''(\theta) + h(\theta) = R(\theta).$$

Segue então que os vértices correspondem aos zeros de $h''' + h'$.

Observe também que dada uma função periódica positiva $p(\theta)$, considere a equação $h''(\theta) + h(\theta) = p(\theta)$. Se conseguirmos uma solução periódica para a equação acima, então a curva $\gamma(\theta) = h'(\theta)T(\theta) - h(\theta)N(\theta)$ é uma curva convexa de raio de curvatura $p(\theta)$.

Esta observação será usada quando formos comentar a recíproca do TQV.

O TQV é consequência do seguinte

Lema 2. *Uma função 2π periódica da forma $h''' + h'$ tem pelo menos quatro zeros.*

Demonstração. Por ser periódica, $h''' + h'$ tem um número par de zeros e necessariamente tem pelo menos dois. Suponha, por absurdo, que $h''' + h'$ tenha apenas dois zeros.

Exercício: Existe uma função g , C^∞ , que satisfaz à equação diferencial $g''' + g' = 0$ e se anula exatamente nos mesmos zeros de $h''' + h'$, tal que $(h''' + h')g > 0$. [Sugestão: comece com a equação linear $g'' + g = A$, A constante].

Usando o exercício e integração por partes

$$\begin{aligned} 0 < \int_0^{2\pi} (h''' + h')gd\theta &= - \int_0^{2\pi} (h'' + h)g'd\theta = - \int_0^{2\pi} h''g'd\theta - \int_0^{2\pi} hg'd\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} h'g''d\theta - \int_0^{2\pi} hg'd\theta = - \int_0^{2\pi} h(g''' + g')d\theta = 0, \end{aligned}$$

obtemos uma contradição. \square

2.1.3 Guggenheimer - Círculos bitangentes.

Além da prova curta publicada em 1969, [37], Guggenheimer prova o TQV sem a hipótese de convexidade. Esta prova geométrica usa círculos bitangentes.

Demonstração. Seja $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular de classe C^2 , simples e fechada. Para cada $s \in [0, L]$ denotamos por $C(s)$

(i) o círculo osculador, caso este esteja inteiramente contido na região compacta \mathcal{R} limitada pelo traço de γ , obtida no Teorema da Curva de Jordan, ou

(ii) o círculo de raio máximo tangente a γ em $\gamma(s)$ e contido em \mathcal{R} , caso o círculo osculador não esteja contido em \mathcal{R} .

No primeiro caso, s não pertence a um arco monótono de γ . No segundo, $C(s)$ é um círculo bitangente a γ . (Porque?)

Observe também que se há arcos monótonos então nem todos os círculos da família $C(s)$ são círculos de curvatura. (por que?). Se não há arcos monótonos em γ , então γ é um círculo.

Se s_0 é um ponto tal que $C(s_0)$ não o círculo de curvatura existe um ponto, que denotaremos por \bar{s}_0 o ponto mais próximo de $s_0 < \bar{s}_0$, tal que $\gamma(s_0)$ está contido em $C(s_0)$. Isto é, outro ponto de tangência de $C(s_0)$ com γ .

Vamos denotar por $c(s)$ o centro do círculo $C(s)$ e por $[z_1, z_2] = tz_1 + (1 - t)z_2$, $0 \leq t \leq 1$, o segmento de reta que liga os pontos z_1 e z_2 .

A primeira observação é que os segmentos radiais são disjuntos.

Lema 3. *Se $\gamma(s_1)$ não pertence a $C(s_0)$, então $[\gamma(s_0), c(s_0)] \cap [\gamma(s_1), c(s_1)] = \emptyset$.*

Demonstração. Por absurdo, suponha que $z \in [\gamma(s_0), c(s_0)] \cap [\gamma(s_1), c(s_1)]$. Trocando os pontos, se necessário, suponha que $\|z - \gamma(s_0)\| \geq \|z - \gamma(s_1)\|$. Então

$$\begin{aligned} \|C(s_0) - \gamma(s_1)\| &< \|C(s_0) - z\| + \|z - \gamma(s_1)\| < \\ &< \|C(s_0) - z\| + \|z - \gamma(s_0)\| = \|C(s_0) - \gamma(s_0)\|. \end{aligned}$$

Isto significa que $\gamma(s_1)$ está no interior do disco limitado por $C(s_0)$. O que contradiz a definição da família de círculos $C(s)$. Concluimos assim que $[\gamma(s_0), c(s_0)] \cap [\gamma(s_1), c(s_1)] = \emptyset$. \square

Vamos agora definir um processo indutivo para encontrar um ponto de máximo local da curvatura.

Observe que a família de círculos $\{C(s)\}_{s \in [0, L]}$ é uniformemente limitada, ou seja, existe um disco no plano que contém todos os elementos da família.

A ideia é usar o Teorema de Seleção de Blaschke que diz que uma família infinita \mathcal{C} de conjuntos não vazios, convexos, compactos e uniformemente limitada em um espaço métrico contém uma sequência que converge em \mathcal{C} , veja [54, cap. 6]. Repare a semelhança deste enunciado com o do Teorema de Bolzano-Weierstrass.

Começando com um círculo de bitangência $C(s_0)$ com ponto de tangência mais próximo \bar{s}_0 . Defina $s_1 = \frac{s_0 + \bar{s}_0}{2}$.

Como $\gamma(s_1)$ não pertence a $C(s_0)$, tomemos $C(s_1)$. Se $C(s_1)$ for um círculo de curvatura, então paramos o processo, pois encontramos um vértice.

Se esse não for o caso, considere \bar{s}_1 . O Lema implica que $\bar{s}_1 \in (s_0, \bar{s}_0)$ pois, caso contrário, o ponto $\gamma(\bar{s}_1)$ estaria no arco de γ complementar ao arco entre s_0

e \bar{s}_0 . Mas isto implica que $c(s_1)$, o centro do círculo $C(s_1)$, está na componente exterior ao "setor" formado pelos raios $[c(s_0), \gamma(s_0)]$, $[c(s_0), \gamma(\bar{s}_0)]$ e o arco em γ que vai de $\gamma(s_0)$ a $\gamma(\bar{s}_0)$. Entretanto, esta configuração implica em intersecção não vazia entre os raios:

$$\{[c(s_0), \gamma(s_0)] \cup [c(s_0), \gamma(\bar{s}_0)]\} \cap \{[c(s_1), \gamma(s_1)] \cup [c(s_1), \gamma(\bar{s}_1)]\} \neq \emptyset.$$

O que contradiz o que nos diz o Lema 3 acima. □

Defina $s_2 = \frac{s_1 + \bar{s}_1}{2}$ e sucessivamente, caso não encontremos um vértice, $s_{j+1} = \frac{s_j + \bar{s}_j}{2}$.

Observe que $s_{j+1}, \bar{s}_{j+1} \in (s_j, \bar{s}_j)$ portanto, por indução, obtemos

$$|s_j - \bar{s}_j| < \frac{1}{2^j} |s_0 - \bar{s}_0|.$$

Segue que, tomando uma subsequência convergente $s_j \rightarrow s^*$, é claro que $\bar{s}_j \rightarrow s^*$.

A sequência de círculos de bitangência $C(s_j)$ está no interior da região \mathcal{R} logo o Teorema da Convergência de Blaschke afirma que existe uma subsequência convergindo a um círculo tangente a γ em $\gamma(s^*)$. Se provarmos que o raio deste círculo é igual a $\frac{1}{k(s^*)}$, então estaremos provando que C^* é o círculo de curvatura de $\gamma(s^*)$ e está contido em \mathcal{R} . Concluimos assim que s^* é um vértice.

Portanto, para concluir a prova do TQV, basta provar que $k(s^*) \neq 0$ e que o raio de $C(s^*)$ é igual a $1/k(s^*)$.

De fato, denotando por $\theta(s)$ o ângulo que $T(s)$ faz com uma direção fixa, pela definição de curvatura escrevemos

$$\theta(\bar{s}_j) = \theta(s_j) + k(s_j)(\bar{s}_j - s_j) + O(|\bar{s}_j - s_j|^2)$$

Portanto

$$k(s^*) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\theta(\bar{s}_j) - \theta(s_j) + k(s_j)}{\bar{s}_j - s_j} = \lim_{j \rightarrow \infty} k(s_j).$$

Por outro lado, podemos obtemos uma estimativa para o raio de cada círculo $C(s_j)$ observando que $\theta(\bar{s}_j) - \theta(s_j)$ é o ângulo entre as normais a $C(s_j)$ nos pontos $\gamma(\bar{s}_j)$ e $\gamma(s_j)$.

Denotando por r_j o raio de $C(s_j)$ pela Lei dos cossenos:

$$\|\gamma(\bar{s}_j) - \gamma(s_j)\|^2 = 2r_j^2[1 - \cos(\theta(\bar{s}_j) - \theta(s_j))] =$$

$$= 4r_j^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta(\bar{s}_j) - \theta(s_j)}{2}\right).$$

De acordo com a forma normal das curvas planas:

$$\|\gamma(\bar{s}_j) - \gamma(s_j)\|^2 = (\bar{s}_j - s_j)^2 + O(|\bar{s}_j - s_j|^4)$$

Enquanto aplicando a Fórmula de Taylor do seno temos:

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta(\bar{s}_j) - \theta(s_j)}{2}\right) = \frac{1}{4}k(s_j)^2(\bar{s}_j - s_j)^2 + O(|\bar{s}_j - s_j|^3)$$

Portanto, juntando todas estas estimativas, obtemos:

$$r_j = \frac{1}{k(s_j)} + O(|\bar{s}_j - s_j|^2)$$

Como a sequência dos círculos é uniformemente limitada, o mesmo ocorre com a sequência de raios r_j . Sendo assim a curvatura $k(s_j)$ não converge para zero e $\lim_{j \rightarrow \infty} r_j = \frac{1}{k(s^*)}$. Em outras palavras, o raio do círculo C^* é igual a $\frac{1}{k(s^*)}$. Ou seja, C^* é o círculo de curvatura de $\gamma(s^*)$ que está totalmente contido na região \mathcal{R} interior ao traço de γ . Segue então que s^* não pertence a um arco monótono, ou seja, é um vértice de γ .

Se agora considerarmos o arco de γ que vai de $\gamma(\bar{s}_0)$ até $\gamma(s_0)$ obtemos o outro ponto s^{**} cujo círculo de curvatura $C(s^{**})$ está contido na região limitada por γ . Se $C(s^{**}) \neq C(s^*)$, então encontramos um outro vértice que é máximo local da curvatura. No caso $C(s^{**}) = C(s^*)$, temos que $C(s^*)$ é um círculo de curvatura bitangente à curva. Prosseguimos então tomando o ponto médio como anteriormente e novamente encontrando um terceiro ponto com círculo de curvatura tangente a γ . Como estamos supondo que nem todo círculo da família $C(s)$ é círculo de curvatura, repetindo o processo um número finito de vezes, caso necessário, encontraremos um novo círculo de curvatura, isto é, diferente de $C(s^*)$ inteiramente contido na região. Este círculo corresponde a um mínimo local.

2.1.4 Conjunto de simetria.

O *Conjunto de Simetria*, lugar dos centros dos círculos de bitangência da curva, é utilizado em computação gráfica como um esqueleto da curva. Dado um esqueleto e uma função contínua e positiva, a curva pode ser obtida como a envoltória dos círculos de centro no conjunto de simetria e raio igual ao valor da função.

Esta é uma das razões pelas quais discutimos uma prova do TQV que usa o conjunto de simetria. Outra razão é o uso de técnicas de singularidades de aplicações

a problemas de geometria diferencial.

Um círculo de bitangência a γ nos pontos $\gamma(s_0)$ e $\gamma(s_1)$ define localmente (ou infinitesimalmente como se diz usualmente) um eixo de simetria da curva. Basta tomar a reta \mathcal{L} que passa pelo centro do círculo e pelo ponto de intersecção das retas tangentes a γ em $\gamma(s_0)$ e $\gamma(s_1)$. (O que ocorre se essas retas são paralelas?)

A *simetria* a que se refere é a reflexão com respeito a reta \mathcal{L} .

Ao introduzirmos a definição de evoluta, na primeira seção, consideramos a família de retas definida por $\Gamma(s, t) := \Gamma_t(s) = \gamma(s) + tN(s)$, considerando s como o parâmetro.

Mudando o ponto de vista, podemos fixar t como parâmetro e considerar a família de curvas $\Gamma_t(s)$ equidistantes a $\gamma(s) = \Gamma(s, 0)$ ($\|\Gamma_t(s) - \gamma(s)\| = |t|$)

O conjunto de simetria, lugar dos centros de círculos de bitangência é caracterizado por $z = \Gamma_t(s_1) = \Gamma_t(s_2), s_1 \neq s_2$, os pontos de auto intersecção de Γ_t .

Como $\Gamma'_t(s) = [1 - k(s)t]T(s)$, vemos que se $t < \frac{1}{k_{max}}$, $k_{max} = \max k(s)$ então a curva Γ_t é regular.

Exercício: Prove que se $t < \frac{1}{k_{max}}$ então Γ_t é uma curva regular, fechada e *simples*. [Sugestão: comece provando que $\forall s_0 \in [0, L]$ existe um intervalo $I(s_0)$ tal que $\Gamma_t(s_1) \neq \Gamma_t(s_2), s_1 \neq s_2 \in I(s_0)$. Para concluir observe que a restrição a Γ_t é homotópica a $\gamma(s)$].

Exercício: Dada uma curva convexa γ , seja \mathcal{L} , com extremidades $\gamma(s_0)$ e $\gamma(s_1)$ a sua menor corda. Prove que \mathcal{L} é perpendicular a γ e que o seu ponto médio está contido no conjunto de simetria.

Além disso, não pode haver mais pontos de γ contidos na corda. Ou seja, o ponto médio da corda é o único da intersecção da corda mínima com o conjunto de simetria.

Exercício: Será que por qualquer ponto da curva passa um círculo de bitangência interna em pontos distintos? Ou será que há pontos especiais em que o círculo de bitangência tem contato de ordem maior do que 1?

Exercício: Descreva o conjunto de simetria da parábola.

Exercício: Descreva o conjunto de simetria de uma elipse, por exemplo, $\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$, com $a > 1$. Como a elipse tem simetrias axiais, certamente o seu conjunto de simetria está contido em um dos eixos da elipse, qual? A partir da corda mínima, verifique o que ocorre com os pontos de bitangência quando nos movemos para a direita. Observe que estamos considerando os círculos de bitangência interna, portanto existe um valor máximo para o raio desses círculos. Qual será este máximo

no caso da elipse?

O fato principal a ser usado nesta abordagem para o TQV é o seguinte: *o lugar dos centros dos círculos bitangentes é um grafo, sem circuitos fechados (laços), cujas extremidades correspondem a pontos de máximo da curvatura.*

A estrutura do conjunto de simetria:

Proposição 6. *Dada uma oval $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$, para cada ponto $\gamma(\theta)$ existe um único ponto do conjunto de simetria, centro do círculo de bitangência que passa por $\gamma(\theta)$.*

Demonstração. Considere a família a um parâmetro de círculos com interior centro na região \mathbb{R} que são tangentes a γ em $\gamma(\theta)$. Como vimos no Capítulo I, os centros estão sobre a reta normal e variando o raio, por continuidade, existe um primeiro valor para o qual o círculo volta a ser tangente à curva. Denote por $\mathcal{C}(z, t)$ o círculo de centro z e raio t .

Se a normal está orientada para dentro da região limitada por γ , para valores pequenos e positivos de t o círculo $\mathcal{C}(\gamma(\theta) + tN(\theta), t)$ está inteiramente contido na região \mathcal{R} . Quando t é suficientemente grande, o círculo, exceto o ponto $\gamma(\theta)$ está na região exterior a \mathcal{R} . Logo existe

$$t_0 = \text{Max}\{t > 0 \mid \mathcal{C}(\gamma(\theta) + tN(\theta), t) \subset \mathcal{R}\}.$$

O centro $\gamma(\theta) + t_0N(\theta)$ está no conjunto de simetria. Este ponto é o único ponto no conjunto de simetria associado ao ponto $\gamma(\theta)$. De fato, por absurdo, sejam $z_1(\theta)$ e $z_2(\theta)$ centros de círculos bitangentes a γ que passam por $\gamma(\theta)$, Suponha que $\gamma(\theta_1)$ e $\gamma(\theta_2)$ sejam os outros pontos de tangência com os círculos $\mathcal{C}(z_1, \gamma(\theta) + tN(\theta), t_1)$ e $\mathcal{C}(z_2, \gamma(\theta) + tN(\theta), t_2)$ respectivamente. Suponha que $t_1 < t_2$.

Então,

$$\|z_2 - \gamma(\theta_1)\| < \|z_2 - z_1\| + \|z_1 - \gamma(\theta_1)\| = \|z_2 - z_1\| + \|z_1 - \gamma(\theta)\| = \|z_2 - \gamma(\theta)\|.$$

A última igualdade segue do fato dos pontos z_1 , z_2 e $\gamma(\theta)$ serem colineares. A desigualdade significa que o ponto $\gamma(\theta_1)$ está contido no interior do círculo $\mathcal{C}(z_2, \gamma(\theta) + tN(\theta), t_2)$, o que contradiz a definição de círculo bitangente (interno). Concluindo a demonstração da Proposição. \square

A componente regular do Conjunto de Simetria de uma curva:

Usaremos o Teorema da Função Implícita, [58], para obter localmente o ponto $\mathcal{S}(\theta)$ associado a um ponto $\gamma(\theta)$ em uma curva regular γ .

Observe que se $\gamma(\theta_0) + t_0N(\theta_0)$ é o centro de bitangência tangente a $\gamma(\theta_0)$, θ_0 pertencente a um arco monótono então $\theta_0 < R(\theta_0)$.

Seja $F(\theta_1, \theta_2, t) = \gamma(\theta_1) - \gamma(\theta_2) - t[N(\theta_1) - N(\theta_2)]$.

Se $\theta_1 \neq \theta_2$ e $F(\theta_1, \theta_2, t_0) = 0$ então o ponto $\gamma(t_1) - t_0N(\theta_1)$ pertence ao conjunto de simetria \mathcal{S} . De fato, $F(\theta_1, \theta_2, t_0) = 0$ se, e somente se, $\gamma(\theta_1) + t_0N(\theta_1) = \gamma(\theta_2) + t_0N(\theta_2)$, logo o círculo de centro $\gamma(\theta_1) + t_0N(\theta_1)$ e raio t_0 é bitangente à curva γ nos pontos $\gamma(\theta_1)$ e $\gamma(\theta_2)$.

Observe agora que a derivada de F no ponto $(\theta_1, \theta_2, t_0)$ tem as seguintes colunas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \theta_1} &= [R(\theta_1) - t_0] T(\theta_1) \\ \frac{\partial F}{\partial \theta_2} &= [t_0 - R(\theta_2)] T(\theta_2) \\ \frac{\partial F}{\partial t} &= N(\theta_1) - N(\theta_2). \end{aligned}$$

Se $t < R(\theta)$ então as duas primeiras colunas só são linearmente dependentes se $T(\theta_1) = -T(\theta_2)$. Mas neste caso, $N(\theta_1) = -N(\theta_2)$, de modo que as duas últimas colunas são linearmente independentes, de fato, ortogonais.

Em qualquer um dos casos, o posto de $DF(\theta_1, \theta_2, t_0)$ é igual a 2 (máximo) e o Teorema da Função Implícita implica que o conjunto de simetria é uma curva de classe C^1 .

Para verificar que \mathcal{S} é uma curva regular, suponha inicialmente que $T(\theta_1) \neq -T(\theta_2)$ de modo que parametrizamos \mathcal{S} localmente por t : a cada t próximo de t_0 associamos um único par $(\theta_1(t), \theta_2(t))$ tal que $\mathcal{S}(t) = \gamma(\theta_1(t)) + tN(\theta_1(t)) = \gamma(\theta_2(t)) + tN(\theta_2(t))$ pertence ao conjunto de simetria com vetor tangente:

$$\mathcal{S}'(t) = [R(\theta_1(t)) - t]T(\theta_1(t)) + N(\theta_1(t)) \neq 0$$

No caso em que $T(\theta_1) = -T(\theta_2)$, a cada θ_1 associamos um par $(\theta_2(\theta_1), t(\theta_1))$ tal que $\mathcal{S}(\theta_1) = \gamma(\theta_1(t)) + t(\theta_1)N(\theta_1(t))$ parametriza o conjunto de simetria, com vetor tangente

$$\mathcal{S}'(\theta_1) = [R(\theta_1) - t(\theta_1)]T(\theta_1) + t'(\theta_1)N(\theta_1) \neq 0.$$

Concluindo assim a descrição local do conjunto de simetria. Seja z o centro de um círculo de bitangência situado em uma componente regular do conjunto de simetria \mathcal{S} , então z é a intersecção de duas retas normais que são transversais a \mathcal{S} em z .

Pergunta: Qual é o fecho do conjunto de simetria?

Vimos na prova o TQV dada por Guggenheimer, descrita na subseção anterior, que os pontos de acumulação de arcos de bitangência são vértices que correspondem a máximos locais da curvatura. Assim, se provarmos que não há laços no conjunto de simetria então teremos provado que existem pelo menos dois pontos distintos de máximo da curvatura.

Proposição 7. *O conjunto de simetria não possui laços, i.e., componentes conexas fechadas homeomorfas ao círculo.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que Δ seja um laço do conjunto de simetria. Podemos supor que Δ seja regular. Defina $T : \Delta \rightarrow \gamma$ por $T(z) = \gamma(s)$ onde $s \in [0, L]$ é o menor valor tal que z é centro de círculo de tangente a γ em $\gamma(s)$. Temos que T é contínua e injetiva, portanto um homeomorfismo. Em particular, T é sobrejetora. Mas se p pertence à imagem de T , então a reta normal a γ que passa por p intersecta Δ duas vezes, pois é transversal a Δ .

Entretanto, vimos que o ponto de corda mínima intersecta o conjunto de simetria em apenas um ponto. Obtemos assim uma contradição. \square

Não tendo laços, as componentes regulares do conjunto de simetria são arcos de curvas regulares, que não possuem auto acumulação, logo seu fecho é constituído de pontos extremais ou vértices. Entretanto, a inexistência de arcos implica que deve haver pelo menos dois pontos extremais em S .

2.1.5 A prova de R. Osserman: considere o círculo circunscrito.

Com a frase do título desta subseção os autores em [16] resumem a principal ideia da prova do TQV dada por R. Osserman [65]. Essa bela prova essencialmente geométrica, tem várias vantagens, entre elas:

- A) vale para curvas não convexas.
- B) fornece o número de vértices em função do número de pontos de tangência da curva com o círculo circunscrito, de modo similar ao que foi provado por Jackson [47].

Teorema 2 (Osserman, 1985). *Seja c uma curva de Jordan de classe C^2 no plano \mathbb{R}^2 . Denotamos por C o círculo circunscrito a c . Então:*

- i) $c \cap C$ contém pelo menos dois pontos.*
- ii) Se $c \cap C$ contém pelo menos n pontos, então c possui pelo menos $2n$ vértices.*

A seguir apresentamos os lemas que serão usados na prova do teorema. Ao leitor interessado sugerimos o artigo de Osserman, [65]. Esta subseção foi inteiramente baseada neste trabalho.

Lema 4. *Seja K um conjunto compacto no plano contendo pelo menos dois pontos. Denote por $\mathcal{C}(K)$ a classe de compactos do plano formada por círculos tais que $K \subset C$ para todo $C \in \mathcal{C}(K)$. Então existe um único círculo $C_K \in \mathcal{C}(K)$ de raio mínimo R que contém K .*

Demonstração. Seja $d(K) = \sup\{\|x - y\|, x, y \in K\}$ o diâmetro de K . Como K é compacto temos que $d(K) < \infty$. Nas hipóteses do lema temos que existem dois pontos $x_0, x_1 \in K$ tais que $d(K) = \|x_0 - x_1\| > 0$. O círculo centrado em $\frac{x_0+x_1}{2}$ e raio $\frac{d(K)}{2}$ é o círculo procurado. \square

O círculo de raio mínimo definido no lema 4 é chamado *círculo circunscrito* ao compacto K . Observamos que naturalmente temos círculos *inscritos* para conjuntos compactos. Da família de círculos contidos em um conjunto compacto K o círculo inscrito é aquele de raio máximo com esta propriedade. No entanto não temos unicidade!

Lema 5. *Se C é um círculo circunscrito ao compacto K , então todo arco de C de comprimento maior que o de um semicírculo intersecta K .*

Demonstração. Pela construção do círculo circunscrito na prova do lema 4 todo arco de C com comprimento maior que um semicírculo contém um dos pontos x_0 e x_1 . \square

Lema 6. *Seja c uma curva regular C^2 de curvatura $k \neq 0$ orientada e C um círculo de raio de curvatura R tangente a c no ponto p . Então:*

- i) Se $k(p) > \frac{1}{R}$ uma vizinhança de p em c está contida no interior da região delimitada por C .*
- ii) Se $k(p) < \frac{1}{R}$ uma vizinhança de p em c está contida no exterior de C .*

Demonstração. Escolhemos coordenadas tal que $p = 0$, $k(0) = k$ e o eixo de tangência entre c e C seja o eixo x . Logo temos, $c(t) = (t, y_c(t)) = (t, \frac{k}{2}t^2 + \dots)$ e $C(t) = (t, y_C(t)) = (t, R - \sqrt{R^2 - t^2})$. Portanto para t pequeno temos $y_c(t) > y_C(t)$ se, e somente se, $k > \frac{1}{R}$. \square

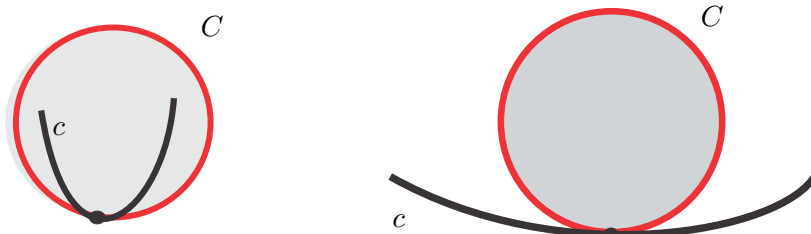


Figura 2.1: Posição relativa e curvatura.

Lema 7. *Seja c uma curva de Jordan positivamente orientada e C o círculo circunscrito de raio R tal que $\{p_1, p_2\} \subset c \cap C$. Denote por $C_1 \subset C$ o arco orientado ligando p_1 a p_2 . Então c coincide com o subarco C_1 ou existe um ponto $q_1 \in c$ tal que $k(q_1) < \frac{1}{R}$.*

Demonstração. Podemos supor, pelo lema 5, que o arco $C_1 \subset C$ positivamente orientado de p_1 a p_2 tem comprimento menor que o de um semicírculo. Suporemos, escolhido um referencial, que C está centrado na origem e p_1 e p_2 tenham a mesma abscissa; veja figura abaixo. Denotamos por c_1 o arco de c , positivamente orientado, ligando os pontos p_1 e p_2 . Se c_1 e C_1 não coincidirem existe $q \in c_1$ contido na região delimitada por C . Tomamos q na região a direita da reta vertical determinada por p_1 e p_2 . Consideramos o círculo C' determinado pelos pontos p_1, q, p_2 . Transladamos o círculo C' para a esquerda até que o arco c_1 tenha um único ponto de contato (tangência) q_1 com C' , isto é, $c_1 \cap C' = q_1$.

Como o raio R' de C' satisfaz $R' > R$ e c_1 está na região externa de C' transladado, temos pelo lema 6 que

$$k(q_1) \leq \frac{1}{R'} < \frac{1}{R}.$$

□

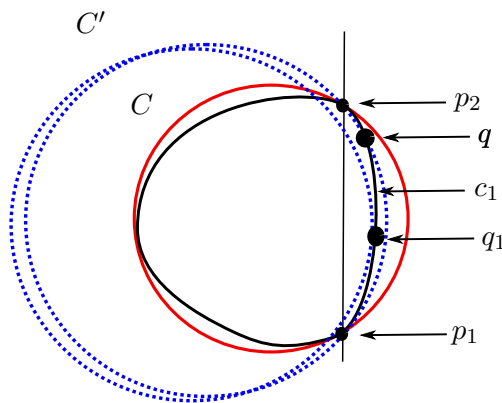


Figura 2.2: Círculo circunscrito.

Demonstração do Teorema 2: A seguir faremos a prova do teorema para o caso de curvas convexas. O caso geral pode ser facilmente adaptado.

Dado uma curva de Jordan c a mesma divide o plano em duas componentes conexas A e B tal que A é limitada e B não limitada com $\bar{A} \cap \bar{B} = c$.

A parte i) do teorema segue do lema 5 pois o conjunto $\bar{A} \cup c$ é compacto e difeomorfo a um círculo.

Para obtermos a parte ii) consideramos os pontos p_1, \dots, p_n em $c \cap C$. Ordenando estes pontos ciclicamente obtemos n arcos c_1, \dots, c_n de c e correspondentes arcos C_1, \dots, C_n em C , conforme Fig. 2.3 abaixo.

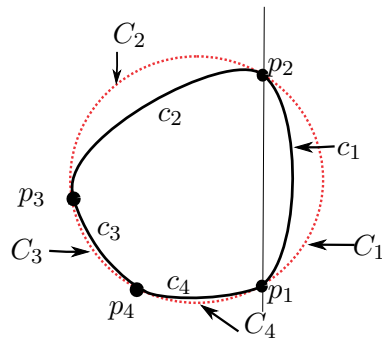


Figura 2.3: Círculo circunscrito e vértices

Cada um dos arcos c_i coincide com C_i ou contém um ponto q_i tal que $k(q_i) < \frac{1}{R}$. Pelo lema 6 temos que $k(p_i) \geq \frac{1}{R}$ para todo $i = 1, \dots, n$. Portanto k possui um mínimo em pontos interiores de $c'_i \in c_i$ e $k(q'_i) < \frac{1}{R}$. Deste modo obtemos n vértices satisfazendo a desigualdade acima.

Por outro lado cada subarco $c'_i \subset c$ ligando q_i a q_{i+1} contém o ponto p_{i+1} . Tendo em vista as desigualdades $k(q_i) < \frac{1}{R}$ e $k(p_i) \geq \frac{1}{R}$ existe um ponto $p'_k \in c'_k$ onde k tem um máximo e $k(p'_k) \geq \frac{1}{R}$. Assim obtemos outros n vértices e portanto obtendo a parte ii) do teorema. \square

Exercício: i) Dê exemplos de várias curvas de Jordan possuindo exatamente 4 vértices.

ii) Dê exemplos de curvas de Jordan possuindo exatamente 6 vértices.

iii) Calcule o número de vértices da parte compacta da cúbica $x^2 + y^2 + \epsilon(x^3 - y^3) = 1$

2.1.6 Outra prova analítica do teorema dos quatro ou mais vértices.

Nesta subseção daremos uma prova analítica do teorema dos quatro ou mais vértices, baseada principalmente no artigo de Tabachnikov, [83].

Lema 8. *Seja $c(s) = (x(s), y(s))$ uma curva regular de classe C^2 convexa e com curvatura $k(s)$. A função $k'(s)$ é ortogonal, relativo ao produto interno do espaço de funções $L^2([0, L], \mathbb{R})$, ao conjunto $\{1, x(s), y(s)\}$.*

Demonstração. Claramente $\int_0^L 1 \cdot k'(s) ds = 0$. Fazendo integração por partes obtemos que:

$$\int_0^L k'(s)c(s)ds = - \int_0^L k(s)T'(s)ds = \int_0^L N'(s)ds = N(L) - N(0) = 0$$

Portanto segue o resultado. □

Observação 4. O espaço de funções $H = L^2([0, L], \mathbb{R})$ de quadrado integrável é um espaço de Hilbert com o produto interno $\langle f, g \rangle = \int_0^L f(t)g(t)dt$.

Um subespaço Y de funções reais definidas no intervalo $[0, L]$, $(2n+1)$ -dimensional, é chamado um *sistema de Chebyshev* se toda função não nula neste espaço possui no máximo $2n$ zeros, contando multiplicidades. O sistema é chamado *regular* se todo subespaço $0 \neq Z \subset Y$ é ainda um *sistema de Chebyshev*.

Um exemplo típico de sistema de Chebyshev é o espaço de polinômios de grau menor ou igual $2n$, o qual é gerado por $\{1, x, x^2, \dots, x^{2n}\}$ e portanto $2n + 1$ -dimensional. Outro exemplo importante de sistema de Chebyshev é o formado pelas funções $\{1, x, x^2, \dots, x^n, x \ln x, x^2 \ln x, \dots, x^n \ln x\}$ de dimensão $3n + 1$.

Um critério útil para caracterizar os sistemas de Chebyshev é dado pela seguinte proposição (veja [53, cap. 6]).

Proposição 8. *Um subespaço de funções Y é um sistema de Chebyshev $2n + 1$ -dimensional se, e somente se, para toda base $\{f_1, \dots, f_{2n+1}\}$ de Y e toda $2n + 1$ -upla de pontos distintos $\{t_1, \dots, t_{2n+1}\}$ no intervalo $[0, L]$ temos que:*

$$\det \begin{pmatrix} f_1(t_1) & f_1(t_2) & \dots & f_1(t_{2n+1}) \\ f_2(t_1) & f_2(t_2) & \dots & f_2(t_{2n+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{2n+1}(t_1) & f_{2n+1}(t_2) & \dots & f_{2n+1}(t_{2n+1}) \end{pmatrix} \neq 0$$

Demonstração. Toda função $f \in Y$ é dada por $f = \sum_{i=1}^{2n+1} a_i f_i$. O subespaço Y é um sistema de Chebyshev se, e somente se, toda f como acima com $2n + 1$ zeros distintos $\{t_1, \dots, t_{2n+1}\}$ no intervalo $[0, L]$ for identicamente nula. O sistema de equações $f(t_j) = \sum_{i=1}^{2n+1} a_i f_i(t_j) = 0, \quad (j = 1, \dots, 2n + 1)$ implica que $a_1 = \dots = a_{2n+1} = 0$. Mas isto ocorre se, e somente se, o determinante no enunciado da proposição for não nulo. □

Teorema 3. *Uma função f ortogonal em $L^2([0, L], \mathbb{R})$ a um sistema $(2n + 1)$ -dimensional de Chebyshev tem pelo menos $2n + 2$ zeros distintos.*

Demonstração. Suponha que f possua somente $2n$ zeros simples, $\{x_1, \dots, x_{2n}\}$. Logo existe g no subespaço $2n + 1$ dimensional de Chebyshev possuindo exatamente os mesmos zeros de f . Logo o sinal de $f.g$ é constante em cada um dos intervalos $[x_i, x_{i+1}]$ e portanto $\int fg \neq 0$ contradizendo a ortogonalidade. O mesmo argumento pode ser efetuado supondo que f possua um menor número de zeros (contando multiplicidade). \square

O teorema dos quatro ou mais vértices é portanto uma consequência do Teorema 3 acima.

2.1.7 Prova geométrica do teorema dos 4 vértices.

Considere uma curva de Jordan convexa $\gamma(u) = (x(u), y(u))$ de classe C^r , $r \geq 3$, com curvatura estritamente positiva e parametrizada de modo que $[\gamma', \gamma''] = 1$. Isto sempre é possível pois γ não possui ponto de inflexão (contato cúbico ou mais degenerado com a reta tangente). Portanto a curvatura k de γ é dada por:

$$k = \frac{1}{|\gamma'|^3} = \frac{1}{[(x')^2 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.1)$$

Considere a curva $\gamma' : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ que, com as hipóteses acima, é uma curva regular simples e periódica de período L . De fato, L é comprimento afim de γ . Além disso observamos que $\int_0^L \gamma'(u) du = 0$ e que o traço de γ' é um conjunto estrelado em relação a origem, i. e., para todo $\gamma'(u)$ o segmento de reta $r_t = t\gamma'(u)$, $t \in [0, 1]$ está contido na região delimitada pelo traço de γ' .

Denote por Γ' a região compacta simplesmente conexa delimitada pelo traço de γ' , i. e., $\gamma'([0, L]) = \partial\Gamma'$.

O seguinte lema é devido a H. Guggenheimer, [36].

Lema 9. *Uma curva fechada β é a derivada de uma curva de Jordan convexa γ se, e somente se, $\int \beta(u) du = (0, 0)$ e o traço de β é um conjunto estrelado em relação a origem.*

Demonstração. (\Rightarrow) Se $\beta(u) = \gamma'(u)$, sendo γ fechada, então $\int \beta(u) du = (0, 0)$. Se β não for estrelado em relação a origem segue que existem dois pontos u_0 e u_1 tais que os vetores $\gamma'(u_0)$ e $\gamma'(u_1)$ sejam paralelos. Uma análise gráfica nos mostra que esta situação não é compatível com a convexidade de γ . Veja Fig. 2.4.

(\Leftarrow) Considere β curva fechada em relação a origem tal que $\int \beta(u) du = (0, 0)$. Então $\gamma(u) = \int \beta(u) du$ é uma curva fechada e podemos supor que $(0, 0)$ não pertence ao traço de γ . Com a hipótese de β ser estrelada podemos concluir que γ

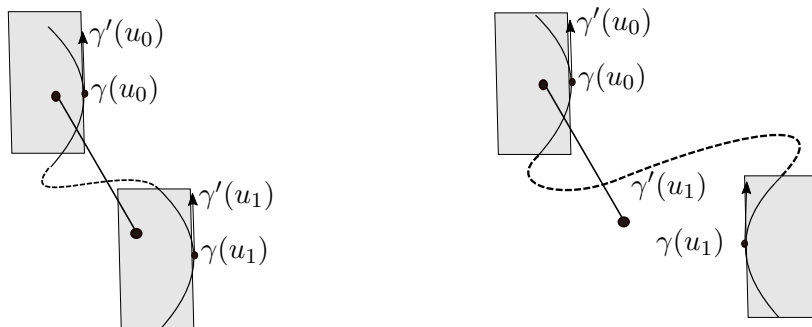


Figura 2.4: Curva não convexa

é uma curva fechada com número de voltas em relação a origem igual $W(\gamma, 0) = \pm 1$. A suposição de γ ser não convexa implica a existência de dois pontos $\gamma(u_0)$ e $\gamma(u_1)$ como ilustrado na Fig. 2.4 e portanto $\gamma' = \beta$ não seria estrelada. \square

Considere a família de círculos C_r centrados na origem. Veja Fig. 2.5.

Afirmção: γ possui pelo menos 4 vértices.

De fato, nos pontos de tangências p_i entre γ' e os círculos de raios r_i temos que $\langle \gamma', \gamma'' \rangle = 0$.

Esta condição caracteriza os vértices de γ pois $\frac{d}{du} \left(\frac{1}{(k_e)^{\frac{2}{3}}} \right) = 2\langle \gamma', \gamma'' \rangle$.

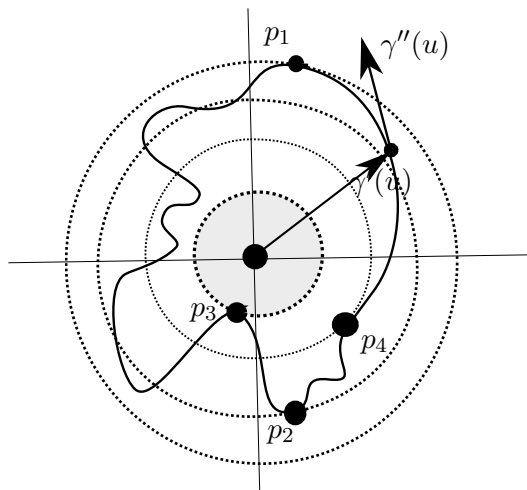


Figura 2.5: Vértices caracterizados pelo contato de círculos com a curva γ' .

Como traço de γ' é um conjunto estrelado podemos parametrizá-la por $\gamma'(u) = (r(u) \cos u, r(u) \sin u)$. Como $\int \gamma' = 0$ temos que $r(u)$ e também $r'(u)$ ortogo-

nais a $\{\cos u, \sin u\}$ e portanto pela Proposição 10 temos que $r(u)$ possui pelo menos 4 pontos críticos e portanto γ possui pelo menos 4 vértices.

De fato,

$$\int_0^{2\pi} r(u) \cos u \, du = r(u) \sin u \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} r'(u) \sin u \, du = - \int_0^{2\pi} r'(u) \sin u \, du = 0.$$

Outra argumentação mais geométrica é considerar o diâmetro $d(\gamma')$ do traço da curva γ' . Existe um único círculo circunscrito a γ' e tangente a γ' nos pontos extremos do diâmetro. O centro deste círculo é exatamente a origem pois $\int \gamma' = 0$. A seguir tomando a família de círculos centrados na origem teremos pelo menos dois pontos de tangência com o traço de γ' , um em cada semi-plano delimitado pela reta suporte do diâmetro.

Observação 5. Para uma discussão sobre contatos entre famílias de curvas e curvas integrais de campos de vetores no plano veja [50]. Para uma introdução as propriedades globais de famílias de curvas planas definidas por equações diferenciais no plano veja [78].

2.2 Curvas definidas implicitamente.

Outro ponto de vista ao considerar curvas regulares é descrevê-las como pré-imagem de um valor regular.

Mais precisamente uma equação implícita $h(x, y) = c$ define uma curva regular (união de componentes conexas difeomorfas a retas e/ou círculos) quando $\nabla h = (h_x, h_y) \neq 0$ quando restrito ao conjunto $H_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : h(x, y) = c\}$.

Um polinômio de grau k no anel de polinômios $\mathbb{R}[x, y]$ é definido por $\frac{1}{2}k(k+3)$ coeficientes. Ou seja, dados $\frac{1}{2}k(k+3)$ pontos em posição geral no plano, existe uma única curva regular polinomial de grau k passando por estes pontos.

Uma equação implícita $h(x, y) = c$ é singular nos pontos em que $\nabla h = (h_x, h_y) = 0$. Um ponto singular, ou crítico, $p_0 \in H_c$, é chamado simples ou de Morse quando as $h_x = 0$ e $h_y = 0$ são curvas regulares numa vizinhança de p_0 e intersectam-se transversalmente neste ponto. Na vizinhança de um ponto singular simples, existem coordenadas tais que $h(x, y) = x^2 \pm y^2$, logo $H_c \cap V(p_0)$ é o próprio ponto p_0 ou um par de curvas regulares transversais. Este fato importante é dado pelo chamado Lema de Morse, veja [58]. O critério para classificar os pontos singulares simples é dado pela condição $\Delta = h_{xx}h_{yy} - h_{xy}^2 \neq 0$ avaliada no conjunto definido por $h_x = h_y = h - c = 0$.

Um ponto $p_0 \in H_c$ é chamado de cúspide quando for singular ($h_x = h_y = h - c = 0$) e $\Delta = h_{xx}h_{yy} - h_{xy}^2 = 0$.

O ponto de cúspide p_0 é regular, ou de primeira ordem, quando o conjunto $\Delta = 0$ for uma curva regular numa vizinhança de p_0 .

Por exemplo, se $h(x, y) = x^2 + ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + O(4)$ temos que $(0, 0)$ é um ponto de cúspide regular, se e somente se, $d \neq 0$. Neste caso existe um difeomorfismo local da forma $\varphi(u, v) = (u - \frac{1}{2}(au^2 + buv + cv^2) + O(3), v + O(3))$ tal que $h(\varphi(u, v)) = u^2 + dv^3 + O(4)$.

Lema 10. *Considere uma curva regular γ definida implicitamente por $h(x, y) = 0$. Então a sua curvatura é dada por*

$$\begin{aligned} k &= \frac{h_y^2 h_{xx} - 2h_x h_y h_{xy} + h_x^2 h_{yy}}{|\nabla h|^3} = -\frac{u^t \text{Hess}(f) u^t}{|\nabla h|^3} \\ &= \frac{1}{|\nabla h|^3} \begin{pmatrix} -h_y & h_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{xx} & h_{xy} \\ h_{xy} & h_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -h_y \\ h_x \end{pmatrix} = \frac{D^2 h(u^t, u^t)}{|u|^3} \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde $u = \nabla h = (h_x, h_y)$ e $u^t = (-h_y, h_x)$.

Demonstração. Por hipótese temos que $h(x(s), y(s)) = h(\gamma(s)) = 0$ e portanto temos que $\gamma' = (x', y') = (-h_y, h_x)$ avaliadas em $\gamma(s)$ e $\gamma'' = (h_y h_{xy} - h_x h_{yy}, h_x h_{xy} - h_y h_{xx})$. Usando a fórmula para o cálculo da curvatura obtemos o resultado. \square

Proposição 9. *Uma curva algébrica regular de grau k possui infinitos vértices ou no máximo $2k(2k - 3)$ vértices e no máximo $k(k - 2)$ pontos de inflexão.*

Demonstração. Derivando a função curvatura obtida na equação (2.2) temos:

$$\begin{aligned} |\nabla(h)|^5 k' &= \left(h_x^2 + h_y^2 \right) \left(h_x^3 h_{yyy} - 3h_x^2 h_y h_{xyy} + 3h_x h_y^2 h_{xxy} - h_y^3 h_{xxx} \right) \\ &\quad + 3[h_x h_y (h_{xx} - h_{yy}) - (h_x^2 - h_y^2) h_{xy}] \\ &\quad [h_x^2 h_{yy} - 2h_x h_y h_{xy} + h_y^2 h_{xx}] \\ &= |u|^2 D^3 h(u^t, u^t, u^t) - 3D^2 h(u^t, u^t) \cdot D^2 h(u, u^t) \end{aligned}$$

Os vértices são dados pelas equações $h = k' = 0$ que são equivalentes a intersecções de dois polinômios de grau k e menor ou igual a $6k - 8$. Mas observamos que o conjunto definido por $h_x^2 + h_y^2 = h = 0$ está contido nesta intersecção e possui $2k(k - 1)$ pontos. Logo pelo Teorema de Bezout temos no máximo $k(6k - 8) - 2k(k - 1) = 4k^2 - 6k = 2k(2k - 3)$ vértices. A estimativa para o número de pontos de inflexão dados por $k = h = 0$ é análoga a anterior. \square

Observação 6. O teorema de Bezout no contexto complexo assegura que duas equações polinomiais algébricas $h(x, y) = 0$ e $g(x, y) = 0$ de graus m e n possuem infinitos pontos de intersecção ou exatamente mn soluções. No contexto real teremos no máximo mn soluções. Veja [90, cap. 5].

Exemplo 6. As órbitas periódicas do campo de vetores $X(x, y) = (-x(x + 2y - 1), y(2x + y - 1))$ possuem 4 ou 6 vértices.

De fato $h(x, y) = xy(x + y - 1)$ é uma integral primeira de X . As curvas integrais na vizinhança do centro $(1/3, 1/3)$ possuem 4 vértices e as próximas do triângulo, gráfico de X , com vértices $\{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$ (pontos singulares tipo sela do campo X) possuem 6 vértices.

Exemplo 7. Trevo $r = 2a \cos(3\theta)$. A sua equação implícita é dada por $h(x, y) = (x^2 + y^2)^3 - 2a(x^3 - 3xy^2) = 0$. O trevo possui 6 vértices. Calcular o número de vértices dos níveis $h^{-1}(c)$.

2.3 Curvas não simples.

No artigo [47], adotando um ponto de vista diferente para o TQV, Jackson busca caracterizar as curvas convexas planas fechadas que possuem exatamente dois vértices. Isso o levou à discussão sobre arcos monótonos, exposta no Capítulo I dessas notas. Uma tal curva é formada por arcos monótonos que só não serão simples se contiverem um círculo tangente à curva. Supondo que não existam tais círculos, uma análise da geometria partindo do vértice de curvatura mínima até o vértice de curvatura máxima, mostra que a curva possui um único ponto duplo na intersecção de dois laços simples, cada um dos quais contendo um vértice.

Jackson vai mais além, procurando descrever as curvas convexas simples fechadas com exatamente $2n$ vértices.

A seguir, apresentamos alguns exemplos de curvas fechadas com exatamente dois vértices.

Exemplo 8. A curva regular fechada γ

$$\gamma(u) = ((R + r \cos u) \cos u, (R + r \cos u) \sin u)$$

com $r > R$ possui somente dois vértices, $\gamma(0) = R + r$ e $\gamma(\pi) = r - R > 0$. O ponto de cruzamento normal é $(0, 0)$, obtido resolvendo a equação $R + r \cos u = 0$.

A curvatura k e sua derivada k' são:

$$k(u) = \frac{R^2 + 2r^2 + 3rR \cos u}{(R^2 + r^2 + 2rR \cos u)^{3/2}}, \quad k'(u) = 3 \frac{Rr^2 \sin u (R \cos u + r)}{(r^2 + 2Rr \cos u + R^2)^{5/2}}.$$

Exemplo 9. A curva fechada $\gamma(u) = (\cos u - a \sin 2u, \sin u + a \cos 2u)$ é regular tendo um ponto de cruzamento normal $(0, a)$ quando $|a| > 1/2$ e possui somente dois vértices, $\gamma(\pi/2) = 1 - a$, $\gamma(-\pi/2) = -1 - a$. De fato sua curvatura é dado por

$$k_\gamma(u) = \frac{6a \sin u - 8a^2 - 1}{(-4a \sin u + 4a^2 + 1)^{3/2}}.$$

Portanto,

$$k'_\gamma(u) = \frac{12a^2 \cos u (\sin u - 2a)}{(-4a \sin u + 4a^2 + 1)^{5/2}}.$$

Para $|a| < 1/2$ a curva γ é fechada e simples e para $|a| = 1/2$ a curva possui um ponto de cúspide $\gamma(\pi/2) = (0, a)$. Veja Fig. 9.

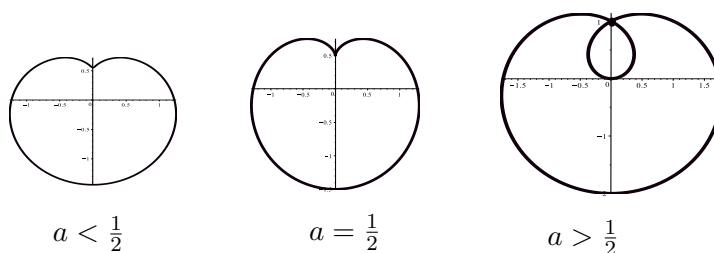


Figura 2.6: Família de curvas $\gamma_a(u) = (\cos u - a \sin 2u, \sin u + a \cos 2u)$.

A curva γ é definida implicitamente pela quártica

$$q_4(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - (2a^2 + 1)(x^2 + y^2) + 2ay + a^2(a^2 - 1) = 0.$$

Veja Exercício 2.14 para observar que esta curva é a translação de uma curva pedal do círculo.

2.4 Exercícios.

2.1. Investigue o teorema dos quatro vértices para curvas fechadas planas no plano de Minkowski \mathbb{R}^2 dotado do produto interno $\langle u, v \rangle = u_1 v_1 - u_2 v_2$, onde $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$. Veja [67, cap. 4] e [74].

2.2. Considere uma função C^∞ duplamente periódica $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de período 2π , i. e., $f(u + 2\pi, v + 2\pi) = f(u + 2\pi, v) = f(u, v + 2\pi) = f(u, v)$ para todo (u, v) . Considere o sistema de equações

$$f_{uuu} + f_u = 0, \quad f_{vvv} + f_v = 0. \quad (2.3)$$

e denote por $S_f = \{(u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : f_{uuu} + f_u = f_{vvv} + f_v = 0\}$.

- i) Dê exemplos de funções tais que S_f seja um conjunto regular (união de curvas regulares difeomorfas a reta ou círculo).
- ii) Dê exemplos de funções tais que S_f seja um conjunto discreto.
- iii) Qual é a quantidade mínima de soluções no domínio fundamental $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$? É possível dar exemplos de funções tais que $S_f = \emptyset$? Justifique.
- iv) Estude o artigo [66] e a teoria de Sturm para funções duplamente periódicas. Veja também [25].

2.3. Considere um par de curvas suaves e regulares γ e Γ , parametrizadas pelos comprimentos de arcos s e u e relacionadas por

$$\Gamma(u(s)) = \gamma(s) + L\gamma'(s). \quad (2.4)$$

Seja $\alpha(u(s))$ o ângulo entre os vetores tangentes $\gamma_s = \gamma'(s)$ e $\Gamma_s = \Gamma'(u(s))$ e denote por k_γ e k_Γ as curvaturas correspondentes. Faça uma boa figura para ilustrar a situação geométrica.

- i) Mostre que $|\alpha(s)| < \frac{\pi}{2}$, $\frac{du}{ds} = \frac{1}{\cos \alpha}$, $k_\gamma = \frac{\tan \alpha}{L}$ e $k_\Gamma = \frac{\sin \alpha}{L} + \frac{d\alpha}{du}$.
- ii) Seja γ convexa. Determine as restrições sobre L de modo a assegurar que Γ seja uma curva regular convexa.
- iii) Se Γ for uma curva regular de Jordan (fechada e simples), existe alguma restrição sobre a quantidade mínima de vértices desta curva? Veja Teorema 4 em [84].
- iv) Mostre que para L pequeno ou muito grande a curva Γ é regular se γ o for. Encontre as restrições sobre L de modo a assegurar que Γ seja uma curva regular quando γ for regular.
- v) Suponha conhecida a curva $\Gamma(u)$ parametrizada pelo comprimento de arco u . Como determinar a curva $\gamma(s)$ satisfazendo a equação (2.4)? Observamos que a equação (2.4) não é uma equação diferencial linear.
- vi) A equação (2.4) modela o movimento de uma bicicleta no plano \mathbb{R}^2 , sendo γ descrevendo o movimento da roda traseira e Γ descrevendo o movimento da roda dianteira. É possível encontrar um par de curvas (γ, Γ) , diferentes de retas, relacionadas pela equação (2.4) de modo que os traços das duas curvas coincidem?

Veja [57] e [84] para maiores detalhes sobre este problema (aberto) no caso de exigir que as curvas sejam analíticas reais.

2.4. Considere a elipse $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$ e $\Gamma(t) = \gamma(t) + L \frac{\gamma'}{|\gamma'|}$ ilustradas na Fig. 2.7 com $a = 2$, $b = 1$ e $L = 2$.

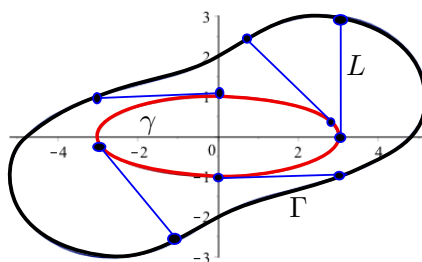


Figura 2.7: Pares de curvas sendo γ uma elipse.

- i) Mostre que se L for pequeno a curva Γ é convexa e possui exatamente 4 vértices.
- ii) Determine valores de L para os quais a curva Γ seja não convexa.
- iii) Encontre parâmetros (a, b, L) tais que Γ possua oito vértices.

Seja γ uma curva fechada, localmente convexa (curvatura positiva k), parametrizada pelo comprimento de arco s e referencial de Frenet $\{t, n\}$ positivamente orientado. Considere a família de curvas paralelas $\gamma_r(s) = \gamma(s) + rn(s)$.

- i) Mostre que genericamente os pontos singulares de γ_r são cúspides.
- ii) Mostre que a curvatura de γ_r é igual $k(s)/(1 - rk(s))$ para $r < \min(1/k)$.
- iii) Mostre que para $r > 0$ grande a curva γ_r é regular, localmente convexa e sua curvatura é negativa, i. e., houve uma mudança de orientação.
- iv) Esboce todo o processo de deslocamento paralelo da elipse. Supondo $b < a$, observe que para $\frac{b^2}{a} < r < \frac{a^2}{b}$ a curva γ_r possui 4 pontos de cúspides.
- v) Investigue os vértices das curvas γ_r supondo que k seja uma função de Morse (pontos críticos não degenerados).

2.5. Considere a projeção estereográfica $\pi : \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$. Dado uma curva plana $\gamma(s)$ seja $\Gamma(s)$ a curva esférica definida por $\pi(\Gamma(s)) = \gamma(s)$.

- i) Calcule a curvatura e a torção de Γ em função dos dados de γ .

ii) Mostre que os vértices de γ e os pontos de torção nula de Γ estão em correspondência biunívoca.

iii) Caracterize os vértices da curvatura geodésica de Γ .

2.6. Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ um arco de curva convexa possuindo o mesmo círculo osculador \mathcal{C} nos pontos $A = \gamma(a)$ e $B = \gamma(b)$.

i) Se nas vizinhanças de A e B o traço de γ está contido no interior (ou exterior) de \mathcal{C} então γ possui pelo menos 3 vértices.

ii) Se na vizinhança de A o traço de γ está contido no interior de \mathcal{C} e na vizinhança de B o traço de γ está contido no exterior então γ possui pelo menos 4 vértices.

iii) Seja γ uma curva convexa fechada possuindo o mesmo círculo osculador \mathcal{C} em dois pontos $A = \gamma(a)$ e $B = \gamma(b)$. Se A e B não são vértices, então γ possui pelo menos 6 vértices.

Se A e B são vértices e na vizinhança de A , $\text{traço}(\gamma) \subset \text{int}(\mathcal{C})$ e na vizinhança de B , $\text{traço}(\gamma) \subset \text{ext}(\mathcal{C})$ então γ possui pelo menos 10 vértices.

2.7. Seja $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ uma curva regular convexa e estrelada em relação a origem .

Defina a curva dual γ^* pelas equações $\langle \gamma, \gamma^* \rangle = 1$ e $\langle \gamma', \gamma^* \rangle = 0$.

i) Mostre que γ^* é regular, estrelada em relação a origem e convexa.

ii) Dado a elipse parametrizada por $\gamma(s) = (a \cos s, b \sin s)$ calcule γ^* e analise suas propriedades geométricas.

2.8. Seja $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ uma curva regular e suponha parametrizada pelo comprimento de arco s .

Seja $F : \mathbb{R}^2 \setminus p_0 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus p_0$ a inversão em relação a círculo centrado em $p_0 \notin \text{traço}(\gamma)$. Se $p_0 = (0, 0)$ e o círculo for o unitário temos que $F(x, y) = (x/(x^2 + y^2), y/(x^2 + y^2))$.

i) Calcule a curvatura da curva $\beta(s) = F(\gamma(s))$.

ii) Mostre que os vértices de γ e de β estão em correspondência biunívoca.

2.9. Seja $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ uma curva regular e suponha parametrizada pelo comprimento de arco s e suponha que $p_0 = (0, 0) = \gamma(s_0)$. Denote por \mathcal{C} o círculo osculador of γ em $(0, 0)$.

i) Seja F a inversão em relação ao círculo oscular \mathcal{C} . Mostre que a curva $\beta(s) = F(\gamma(s))$ é assintótica a reta tangente a curva γ em $(0, 0)$ no infinito e que sua curvatura tende a zero no infinito. Se $(0, 0)$ não for vértice de γ então , na vizinhança

do infinito, β está contida em semiplanos distintos definidos pela reta $R(t) = t\gamma'(s_0)$.

ii) Mostre que se $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ for um arco regular com $\gamma(a) \in L$ e $\gamma(b) \in L$, onde L é uma reta e tal que a região limitado por $\gamma([a, b])$ e o segmento de $[\gamma(a); \gamma(b)]$ for simplesmente conexa então existe $s_0 \in (a, b)$ tal que a curvatura de γ em s_0 é positiva (ou negativa).

iii) Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ um arco regular com $\gamma(a) \in L$ e $\lim_{s \rightarrow b^-} \gamma(s) = \infty$, com γ assintótica a L no infinito e além disso a reta L esteja a esquerda de γ . Mostre que existe $s_0 \in (a, b)$ tal que $k(s_0) > 0$ e $s_0 < s_1 \in (a, b)$ tal que $k(s_1) < 0$ e $k'(s_1) = 0$.

iv) A partir dos itens i), ii) e iii) demonstre o teorema dos 4-vértices. Veja [40].

v) Demonstre o teorema de Möbius que afirma que uma curva regular de Jordan no plano projetivo que não seja homotópica a zero possui pelo menos 3 pontos de inflexão e portanto também 3 vértices.

2.10. Seja $z(s) = x(s) + iy(s) \in \mathbb{C}$ uma curva regular plana parametrizada por comprimento de arco s , i. e., $|z'| = 1$, com curvatura $k(s)$. Seja $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc = 1$, uma transformação de Möbius.

i) Mostre que $k' = \text{Im}\left(\frac{z'''}{z'}\right) = \text{Im}\{z, s\}$ onde

$$\{z, s\} = \frac{z'''}{z'} - \frac{3}{2} \left(\frac{z''}{z'}\right)^2 = \left(\frac{z''}{z'}\right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{z''}{z'}\right)^2.$$

Observamos que $\{z, s\}$ é a derivada de Schwartz.

ii) Defina a curva $w(s) = f(z(s))$ e mostre que os sinais das derivadas das curvaturas de $z(s)$ e $w(s)$ são os mesmos. Em particular os vértices são preservados por uma transformação de Möbius.

2.11. Considere a curva cilíndrica $\gamma(s) = (\cos s, \sin s, h(s))$, sendo h uma função periódica de período 2π e de classe C^k , $k \geq 3$.

i) Calcule a curvatura e a torção de γ .

ii) Mostre que γ possui pelo menos 4 pontos de torção nula.

iii) Escreva o vetor curvatura $\vec{k} = \vec{k}_g + \vec{k}_n$ e defina $k_g = |\vec{k}_g|$ e $k_n = |\vec{k}_n|$. Lembramos que $\vec{k} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\gamma'}{|\gamma'|}\right)$. Calcule k_g e k_n e mostre que cada uma dessas funções possui pelo menos 4 pontos críticos.

iv) Considere a curva esférica $\beta(s) = \gamma(s)/|\gamma(s)|$ e faça os itens anteriores para a curva β .

2.4. EXERCÍCIOS.

49

2.12. Seja γ uma curva regular de Jordan esférica que divide a esfera em duas regiões com a mesma área. i) Mostre que γ possui pelo menos 4 pontos de inflexão, i. e., 4 pontos com curvatura geodésica nula.

2.13. Considere o polinômio cúbico $h(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$.

i) Mostre que

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = \left(\frac{3at}{1+t^3}, \frac{3at^2}{1+t^3} \right)$$

é uma parametrização de $h(x, y) = 0$ e esboce o seu traço.

ii) Calcule os vértices da cúbica $x^3 + y^3 - 3axy = b$ para vários valores de (a, b) .

2.14. Seja $p_0 \in \mathbb{R}^2$ e γ uma curva regular. Defina a curva pedal por

$$p(s) = p_0 + \frac{1}{\langle \gamma', \gamma' \rangle} \langle (p_0 - \gamma(s)), R_{\pi/2} \gamma'(s) \rangle R_{\pi/2} \gamma'(s).$$

Geometricamente $p(s)$ é a interseção da reta $p_0 + tR_{\pi/2}\gamma'(s)$ com a reta tangente (afim) a γ no ponto $\gamma(s)$.

i) Seja $\gamma(s) = (\cos s, \sin s)$. Calcule p para vários valores de $p_0 = (x_0, y_0)$ e esboce o seu traço.

ii) Seja γ parametrizada por comprimento de arco s . Denote as equações de Frenet por $\gamma'(s) = t(s)$, $t'(s) = k(s)n(s)$, $n'(s) = -k(s)t(s)$. Mostre que se γ for uma oval estritamente convexa (curvatura positiva) a curva $p(s)$ é regular se, e somente se, p_0 pertence a região delimitada pelo traço de γ .

iii) Analise a curva $p(s)$ na vizinhança de um ponto de curva nula de γ . Em que condições este ponto é um ponto de cúspide simples?

iv) Calcule a curvatura de $p(s)$.

Determine condições sobre γ e p_0 para a curva pedal ser localmente convexa.

v) Considere a curval pedal negativa definida por

$$p_-(s) = \gamma(s) + \frac{1}{\langle \gamma', \gamma' \rangle} \langle (p_0 - \gamma(s)), n(s) \rangle n(s), \quad n(s) = R_{\pi/2} \gamma'(s).$$

Analise os itens i), ii) e iii) para a curva pedal negativa p_- .

2.15. i) Demonstre o seguinte teorema de Schur

"Sejam dois arcos de curvas convexas γ e η parametrizados por comprimento de arco s e de mesmo comprimento intrínseco $L = \int_0^L |\gamma'(s)| ds = \int_0^L |\eta'(s)| ds$ e suponha que $0 < k_\eta(s) < k_\gamma(s)$. Então o comprimento euclidiano $L_\gamma = |\gamma(L) - \gamma(0)|$ de γ é menor que o comprimento euclidiano $L_\eta = |\eta(L) - \eta(0)|$ de η ."

ii) Demonstre o Teorema de Schur para curvas convexas com esquinas, i. e., curvas de classe C^2 por partes, com um número finito de pontos de descontinuidade da função curvatura.

Sugestão: Veja as notas de curso de H. Hopf no endereço

<http://www.math.cornell.edu/hatcher/Other/hopf-samelson.pdf>

2.16 (Teorema de Vogt). Suponha um arco de curva γ tal que a corda determinada por a e b e γ determina uma região convexa, veja Fig. 2.8. Suponha que entre os pontos a e b a curvatura de γ seja positiva e monótona decrescente. Mostre que o ângulo α é maior que o ângulo β .

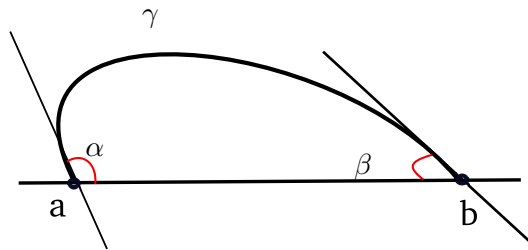


Figura 2.8: Arcos de curvas convexas com curvatura monótona.

2.17. i) Demonstre o teorema dos quatro vértices usando o Teorema de Schur.

ii) Demonstre o teorema dos quatro vértices usando o Teorema de Vogt.

2.18. Seja $p_0 \in \mathbb{R}^2$ um ponto exterior a uma elipse \mathcal{E} . Considere as duas retas tangentes L_i a \mathcal{E} passando por p_0 e seja $p_i = L_i \cap \mathcal{E}$. Sejam $l_i = |p_0 - p_i|$ e $r_i = 1/k_i$ os raios de curvatura da elipse \mathcal{E} no ponto p_i . Mostre que

$$\frac{r_1}{r_2} = \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^3.$$

2.19. Seja

$$\gamma(t) = \left(\int_0^t \cos(f(u))du, \int_0^t \text{sen}(f(u))du \right), \quad f(u) = \frac{u^2}{2}$$

i) Calcule a curvatura de γ e esboce o traço de γ .

ii) Mostre que existe $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t)$ e determine aproximadamente este limite.

iii) Faça os itens i) e ii) supondo $f(u) = \frac{u^n}{n}$.

2.20. Seja $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação linear invertível definida por $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$. Identifique A com a sua representação matricial na base canônica. Veja [75].

i) Seja $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ uma curva regular de classe C^3 parametrizada por comprimento de arco s . Calcule a curvatura de $\beta(s) = A\gamma(s)$.

ii) Seja $p_0 = \gamma(s_0)$ um vértice de γ . Mostre que para um conjunto aberto de matrizes A o ponto $\beta(s_0) = Ap_0$ não é vértice de β .

iii) Suponha γ fechada simples e V_γ o conjunto de vértices de γ . Mostre que A é uma rotação ou uma homotetia se, e somente se, $A(V_\gamma) = V_\beta$.

iv) Dê exemplo de uma curva de Jordan γ com 4 vértices e tal que $\beta = A\gamma$ possua exatamente 6 vértices.

2.21. Seja $X_n(x, y) = (P_n(x, y), Q_n(x, y))$ um campo de vetores polinomial no plano de grau n . Veja [76].

i) Seja γ uma solução periódica (curva integral regular) de X_2 . Mostre que γ é convexa.

ii) Mostre que γ como no item i) possui infinitos vértices ou no máximo 12 vértices.

iii) Construa um campo de vetores quadrático possuindo uma órbita periódica com 6 vértices.

iv) Obtenha estimativas sobre o número de vértices de uma curva integral (aberta e/ou fechada) de X_n .

Capítulo 3

Recíproca do Teorema dos Quatro Vértices

“Topology is precisely the mathematical discipline that allows the passage from local to global...”

“All models divide naturally...into two a priori parts: one is kinematics, whose aim is to parameterize the forms of the states of the process under consideration, and the other is dynamics, describing the evolution in time of these forms.”

– René Thom (1923-2002)

3.1 Recíproca do TQV.

Neste capítulo será considerada a recíproca do teorema dos quatro vértices. A questão básica é estabelecer as condições necessárias e suficientes para que uma função periódica seja a curvatura de uma curva simples fechada no plano.

3.1.1 Uma prova para o caso convexo usando séries de Fourier.

Vimos que uma curva regular, simples, convexa e fechada admite uma parametrização, usando a função suporte $f(\theta) = -\langle \gamma(\theta), N(\theta) \rangle$ da seguinte forma $\gamma(\theta) = f'(\theta)T(\theta) - f(\theta)N(\theta)$. Vimos também que $\frac{1}{k(\theta)} = f''(\theta) + f(\theta)$.

Lema 11 ([44]). *Seja p uma função periódica, positiva, de período 2π e de classe C^k , $k \geq 2$. Suponha que*

$$\int_0^{2\pi} p(\theta) \cos \theta \, d\theta = 0 \quad e \quad \int_0^{2\pi} p(\theta) \sin \theta \, d\theta = 0. \quad (3.1)$$

Considere a equação diferencial

$$(*) \quad f''(\theta) + f(\theta) = p(\theta).$$

Então

$$f_0(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} x p(x + \theta + \pi) dx \quad (3.2)$$

é uma solução periódica e positiva de (*).

Toda solução de (*) é da forma $f(\theta) = f_0(\theta) + a_1 \cos \theta + b_1 \operatorname{sen} \theta$.

Demonstração. Segue por cálculo direto. De fato, temos que

$$f_0''(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} x p''(x + \theta + \pi) dx.$$

Integrando por partes duas vezes obtemos:

$$\begin{aligned} 2\pi(f_0''(\theta) + f_0(\theta)) &= p(\theta) + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos x p(\theta + x + \pi) dx \\ &= 2\pi p(\theta) + \frac{1}{\pi} \int_{\theta}^{\theta+2\pi} \cos(x - \theta - \pi) p(x) dx \\ &= 2\pi p(\theta) - \frac{\cos \theta}{\pi} \int_{\theta}^{\theta+2\pi} \cos(x) p(x) dx \\ &\quad + \frac{\operatorname{sen} \theta}{\pi} \int_{\theta}^{\theta+2\pi} \operatorname{sen}(x) p(x) dx = 2\pi p(\theta) + 0 + 0 = 2\pi p(\theta). \end{aligned}$$

Claramente $f_0(\theta) > 0$ pois $x \operatorname{sen} x > 0$ em $(-\pi, \pi) \setminus \{0\}$ e $f_0(\theta) = f_0(\theta + 2\pi)$. Portanto o resultado está demonstrado. \square

Proposição 10 ([2, 46, 81]). *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período 2π e de classe C^r , $r \geq 1$, tal que*

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) \cos k\theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} f(\theta) \operatorname{sen} k\theta \, d\theta = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Então f possui pelo menos $2(n + 1)$ pontos críticos no intervalo $[0, 2\pi]$.

Em outros termos, se

$$f(\theta) = \sum_{k \geq n+1} [a_k \cos k\theta + b_n \operatorname{sen} k\theta]$$

Então $\#\{\theta \bmod 2\pi : f(\theta) = 0\} \geq 2(n + 1)$.

Demonstração. Faremos inicialmente a demonstração quando $n = 1$. Suponha que f tenha média zero, i. e., $\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta = 0$. Portanto f troca de sinal pelo menos duas vezes. Vamos mostrar que f se anula pelo menos 4 vezes. Considere o vetor $N(\theta) = (\cos \theta, \text{sen}\theta)$. Como por hipótese $\int_0^{2\pi} f(\theta)N(\theta)d\theta = 0$ temos que

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)N(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} f(\theta)[R_\alpha(N(\theta) + U)]d\theta = 0,$$

onde R_α é uma rotação de ângulo α e $U = (u_0, v_0)$ é um vetor constante.

Assim, fazendo uma translação e uma rotação se necessário, podemos supor que f se anula nos pontos $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ com $f|_{(0,\pi)} > 0$.

Agora observamos que

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(\theta) \text{sen}\theta d\theta &= \int_0^\pi f(\theta) \text{sen}\theta d\theta + \int_\pi^{2\pi} f(\theta) \text{sen}\theta d\theta \\ &= \int_0^\pi f(\theta) \text{sen}\theta d\theta + \int_\pi^{2\pi} |f(\theta)|(-\text{sen}\theta) d\theta > 0. \end{aligned}$$

Ambas as parcelas possuem o mesmo sinal e assim obtemos uma contradição.

O caso $n \geq 2$ seguiremos a mesma ideia.

Inicialmente interpretamos $f(\theta)$ como sendo a restrição ao círculo unitário de uma função $F(x, y)$ definida no plano, ou num aberto contendo o círculo unitário.

Definindo $x = \cos \theta$ e $y = \text{sen}\theta$ temos que $\cos 2\theta = x^2 - y^2$, $\text{sen}2\theta = 2xy$. Em geral, $\cos k\theta$ e $\text{sen}k\theta$ são polinômios homogêneos de grau k nas variáveis x e y .

Assim nas hipóteses da proposição temos que

$$F(x, y) = \sum_{k \geq n+1} [a_k p_k(x, y) + b_k q_k(x, y)].$$

Logo $f(\theta) = F(\cos \theta, \text{sen}\theta)$.

No caso $n = 2$, suponha $\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta = 0$. Se f possuir somente 4 zeros podemos encontrar um polinômio trigonométrico $f_2(\theta) = a_0 + a_1 \cos \theta + b_1 \text{sen}\theta + a_2 \cos 2\theta + b_2 \text{sen} 2\theta$ tal que f_2 possua os mesmos zeros de f e $\text{sinal}(f_2) = \text{sinal}(f)$ o que conduz a $\int_0^{2\pi} f_2(\theta)f(\theta)d\theta \neq 0$, uma contradição. Logo f possui pelo menos 6 zeros e f' possui pelo menos 6 pontos críticos. O polinômio f_2 é a restrição ao círculo unitário de um polinômio $q_2(x, y) = (ax + by + c)(Ax + By + C)$ que intersecta o círculo em quatro pontos (zeros de f).

O caso geral é obtido formalizando o argumento anterior. O ponto importante a observar é que dado quaisquer conjuntos de $2n$ pontos no círculo unitário existe um polinômio $q(x, y)$ de grau n tal que a intersecção de $q(x, y)=0$ com o círculo

unitário é exatamente este conjunto de pontos. □

Exercício i) Construa um polinômio trigonométrico da forma $p(t) = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + a_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t$ tendo como pontos críticos o conjunto $\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\}$.

ii) Construa um polinômio trigonométrico da forma $p(t) = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + a_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t$, com $a_2 b_2 \neq 0$, tendo como pontos críticos o conjunto $\{\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}\}$.

Lema 12. *Seja p uma função periódica, de período 2π e de classe C^k , $k \geq 2$. Suponha que a equação (3.1) é satisfeita. Então p possui pelo menos dois pontos de máximo e dois de mínimo.*

Demonstração. Considere a decomposição de p na sua série de Fourier (veja [21])

$$p(\theta) = p_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\theta) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\theta).$$

Como por hipótese $\int_0^{2\pi} p(\theta) \cos \theta d\theta = 0$ e $\int_0^{2\pi} p(\theta) \sin \theta d\theta = 0$ obtemos que $a_1 = b_1 = 0$. Logo os primeiros harmônicos de p não nulos são periódicos de período menor ou igual a π , i. e., $p(\theta) = a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta) + \dots$, com $n \geq 2$. Portanto, pelo Proposição 10, p' possui pelo menos 4 zeros no intervalo $[0, 2\pi]$. □

Teorema 4. *Seja $p(\theta)$ uma função positiva de classe C^k , $k \geq 2$, e periódica de período 2π , tal que $\int_0^{2\pi} p(\theta) \cos \theta d\theta = \int_0^{2\pi} p(\theta) \sin \theta d\theta = 0$. Então existe uma curva regular fechada $\gamma(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$ tal que $k_\gamma = 1/p(\theta)$.*

Demonstração. Segue diretamente dos lemas 11 e 12. □

Proposição 11. *Seja $p(\theta)$ uma função positiva de classe C^k , $k \geq 2$, e periódica de período 2π com 2 pontos de máximo e dois de mínimo. Então existe um difeomorfismo $\varphi : [0, 2\pi] \rightarrow [0, 2\pi]$, tal que $\varphi^{(i)}(0) = \varphi^{(i)}(2\pi)$ e $\int_0^{2\pi} p(\varphi(\theta)) \cos \theta d\theta = \int_0^{2\pi} p(\varphi(\theta)) \sin \theta d\theta = 0$.*

Demonstração. Pode ser obtida usando a mesma técnica da prova da recíproca do teorema dos quatro vértices a ser apresentada na subseção 3.1.4. □

3.1.2 Deformações da curvatura por mudanças de coordenadas.

Nesta Seção provamos uma recíproca do TQV para curvas estritamente convexas. A ideia da prova é generalizada para o caso não convexo. Nesta prova, usamos o conceito de deformação de um campo de vetores normais, que, no caso da curvatura segue da seguinte observação:

Sejam $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$, uma curva regular fechada de classe C^2 com curvatura k e $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ um difeomorfismo de classe C^2 , isto é, uma aplicação C^2 com inversa C^2 . A composta $\gamma_h = \gamma \circ h$ é uma curva regular cuja curvatura é igual a:

$$k_h = k \circ h$$

Este fato segue da regra da cadeia e da fórmula da curvatura:

$$\gamma'_h = \gamma' \circ h, h' \text{ e } \gamma''_h = \gamma'' \circ h \cdot (h')^2 + \gamma' \circ h \cdot h''$$

Assim temos a seguinte relação:

$$k_h = \frac{[\gamma'_h, \gamma''_h]}{|\gamma'_h|^3} = \frac{[(\gamma' \circ h) \cdot h', (\gamma'' \circ h) \cdot (h')^2]}{|(\gamma' \circ h) \cdot h'|^3} = \frac{[\gamma' \circ h, \gamma'' \circ h]}{|\gamma' \circ h|^3} = k \circ h.$$

Outro tipo de deformação ocorre ao fazermos uma homotetia no plano. Sejam $c \neq 0$ e $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva simples, regular e fechada de classe C^2 , com curvatura k . Então a curva $c \cdot \gamma$ tem curvatura igual a $\frac{1}{c}k$. mantendo as mesmas propriedades (simples, regular e fechada).

Estas duas propriedades de deformações são úteis na prova do Caso Convexo:

Teorema 5. *Seja $k : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua não constante, estritamente positiva, com pelo menos dois máximos e dois mínimos locais.*

Então existe um mergulho $G : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuja imagem é uma curva regular convexa cuja curvatura no ponto $G(\varphi)$ é igual a $k(\varphi)$ para todo $\varphi \in \mathbb{S}^1$.

Além disso, se k for de classe C^r , $r \geq 0$, então o mergulho G é de classe C^{r+1} .

A seguir enunciamos condições que caracterizam a função curvatura de uma curva fechada simples:

Se a função k for estritamente positiva e $T(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ o vetor unitário da tangente, então a função que a cada $s \mapsto \theta$ é uma mudança de parâmetros de modo que:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{k(\theta)} T(\theta) d\theta = 0$$

ou, equivalentemente, conforme Gluck,[34], usando o vetor normal apontando para fora da curva (aplicação normal de Gauss) e o ângulo $\varphi = \theta - \frac{\pi}{2}$:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{k(\varphi)} N(\varphi) d\varphi = 0.$$

Vejam como formular a caracterização em termos de uma equação:

A recíproca do teorema dos quatro vértices para curvas convexas pode ser formulada em termos de uma equação:

Se $\int_0^{2\pi} \frac{1}{k(\varphi)} N(\varphi) d\varphi = 0$, com $\int_0^{2\pi} k(\varphi) d\varphi = 2\pi$ existe uma curva simples fechada convexa contida em \mathbb{R}^2 cuja curvatura é igual a $k(\varphi)$. De fato, se $\gamma(\theta) = \int_0^\theta \frac{T(u)}{k(u)} du$, então $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$ (fechada), regular, com curvatura $k(\varphi)$ e simples.

Entretanto, para uma dada função k positiva, é possível que a integral não se anule mas que exista um difeomorfismo $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ tal que

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{k(h^{-1}(\varphi))} N(\varphi) d\varphi = 0$$

Neste caso, obtemos um outro mergulho cuja imagem é uma curva fechada, simples e convexa cuja curvatura é a função dada.

De fato, seja $\gamma_1(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{1}{k(h^{-1}(\phi))} T(\phi) d\phi$.

Então, γ_1 é uma curva regular, simples fechada de curvatura igual a $k_{\gamma_1} = k(h^{-1}(\phi))$. Portanto, se $\gamma = \gamma_1 \circ h$, então é uma curva simples e fechada com curvatura $k_\gamma = k_{\gamma_1} \circ h = k$, o que prova a recíproca do Teorema dos Quatro vértices no caso convexo.

O argumento de Gluck para encontrar o difeomorfismo h é uma bela ilustração do uso de conceitos topológicos, isotopia e número de voltas ("winding number"), para provar resultados de análise. No nosso caso resolver uma equação funcional.

Gluck prova um resultado mais abstrato sobre campos de vetores normais ao círculo que implica em uma prova do teorema dos quatro vértices e de sua recíproca para curvas convexas. Antes, porém, definimos os conceitos usados no enunciado do resultado.

Definição 7. Um campo contínuo e normal ao círculo $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ é dado por $X(\varphi) = f(\varphi)N(\varphi)$, onde f é uma função contínua e $N(\varphi) = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))$.

Definição 8. Um campo normal $g(\varphi)N(\varphi)$ é uma deformação de um campo $f(\varphi)N(\varphi)$ se existe um difeomorfismo $h \in \text{Difeo}(\mathbb{S}^1)$ tal que $g = f \circ h^{-1}$.

Definição 9. Um difeomorfismo $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ é isotópico à identidade se existe

uma família $F : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ contínua tal que, para cada t fixado a aplicação $\theta \rightarrow F(t, \theta)$ é um difeomorfismo com $F(0, \theta) = h(\theta)$ e $F(1, \theta) = id(\theta)$.

Teorema 6. *Um campo vetorial normal não constante $f(\varphi)N(\varphi)$ no círculo $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ possui uma deformação tal que a sua integral em \mathbb{S}^1 se anula se e somente se f possui pelo menos dois máximos e dois mínimos.*

Antes de discutir a prova do teorema, descreveremos os passos da prova:

Suponhamos que f tenha pelo menos dois máximos e dois mínimos. Devemos encontrar um difeomorfismo h tal que

$$\int_0^{2\pi} f(h^{-1}(\varphi))N(\varphi)d\varphi = 0.$$

Isto motiva a definição da seguinte aplicação $I_f : \text{Difeo}(\mathbb{S}^1) \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$I_f(h) = \int_{\mathbb{S}^1} f(h^{-1}(\varphi))N(\varphi)d\varphi.$$

Observe que se definimos

$$I_1(h) = \int_{\mathbb{S}^1} f(h(\varphi))N(\varphi)d\varphi$$

então,

$$|I_1(h_1) - I_1(h_2)| \leq \int_{\mathbb{S}^1} |f(h_1(\varphi)) - f(h_2(\varphi))| |N(\varphi)| d\varphi \leq \int_{\mathbb{S}^1} |f(h_1(\varphi)) - f(h_2(\varphi))| d\varphi.$$

Mas f é contínua em um conjunto compacto, logo uniformemente contínua, isto é, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $dist(\theta_1, \theta_2) < \delta$ implica $|f(\theta_1) - f(\theta_2)| < \epsilon$, $dist$ distância no círculo.

Portanto, se $\|h_1 - h_2\|_\infty = \max_{\theta \in \mathbb{S}^1} dist(h_1(\theta), h_2(\theta)) < \delta$, então $|I_1(h_1) - I_1(h_2)| < 2\pi\epsilon$.

O operador I_1 é contínuo na topologia compacto-aberta em $\text{Difeo}(\mathbb{S}^1)$ (portanto contínuo na topologia C^r).

Como a aplicação $\text{Difeo}(\mathbb{S}^1) \rightarrow \text{Difeo}(\mathbb{S}^1)$, $h \mapsto h^{-1}$ é contínua, temos que o operador $I_f(h) = I_1(h^{-1})$ também é contínuo.

Usando um argumento similar, provamos que o operador I_f depende continuamente da função f .

Usando a hipótese de existência de pelo menos dois pontos de máximo e dois pontos de mínimo locais, é possível deformar f por um difeomorfismo h^* de modo que $f \circ h^*$ é constante exceto em um subconjunto de medida pequena.

O resultado disso, no contexto em que $f = \frac{1}{k}$, o raio de curvatura, é a concentração da variação da curvatura em pequenos intervalos. Isto significa que a curva regular, obtida por integração, é constituída de arcos quase circulares e pequenos arcos onde concentramos a variação de curvatura.

Defina um novo operador para o campo deformado, ou seja, substituindo f por $f \circ h^*$:

$$I_1(h) = \int_{\mathbb{S}^1} f \circ h^*(h^{-1}(\varphi))N(\varphi)d\varphi$$

Novamente, se $I_1(h_0) = 0$, então $I(h_0 \circ h^{*-1}) = 0$. Portanto, basta encontrar a solução para funções bem aproximadas, em média, por funções constantes por partes.

Campos normais com as características descritas acima podem ser aproximados por campos constantes por partes.

3.1.3 Resolvendo a equação em uma situação mais simples.

Um problema mais simples poderia ser formulado da seguinte forma: dados quatro arcos de círculos J_1, J_3 , de raios $\frac{1}{A}$ e J_2 e J_4 de raios iguais a $\frac{1}{B}$, de comprimentos variáveis, encontrar os comprimentos de modo que a curva formada pelos quatro arcos intercalados, justapostos J_1, J_2, J_3 e J_4 seja fechada.

Formulado em termos de campos normais:

Suponha então que $g(\varphi)N(\varphi)$ seja um campo constante por partes em intervalos alternados $J_1 \cup J_2 \cup J_3 \cup J_4 = \mathbb{S}^1$ (descontínuo) definido por

$$g(\varphi) = \begin{cases} A, & \text{se } \varphi \in J_1 \cup J_3 \\ B, & \text{se } \varphi \in J_2 \cup J_4. \end{cases}$$

Observe que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^1} g(\varphi)N(\varphi)d\varphi &= \int_{J_1 \cup J_3} g(\varphi)N(\varphi)d\varphi + \int_{J_2 \cup J_4} g(\varphi)N(\varphi)d\varphi = \\ &= B \int_{J_1 \cup J_3} N(\varphi)d\varphi + A \int_{\mathbb{S}^1} N(\varphi)d\varphi - A \int_{J_1 \cup J_3} g(\varphi)N(\varphi)d\varphi \\ &= [B - A] \int_{J_1 \cup J_3} g(\varphi)N(\varphi)d\varphi \end{aligned}$$

Aqui usamos $\int_{\mathbb{S}^1} N(\varphi)d\varphi = 0$.

Afirmação: uma curva formada por quatro arcos de círculos de raios alternados iguais é fechada se, e somente se, os arcos opostos têm comprimentos iguais.

Demonstração. Calcule $\int_{\varphi_a}^{\varphi_b} N(\varphi)d\varphi$

Se $\lambda = \varphi_b - \varphi_a$ e $\varphi_0 = \frac{\varphi_a + \varphi_b}{2}$ é o ponto médio do intervalo (φ_a, φ_b) então fazendo uma mudança de variáveis e calculando a integral obtemos:

$$\int_{\varphi_a}^{\varphi_b} N(\varphi)d\varphi = \int_{\varphi_0 - \frac{\lambda}{2}}^{\varphi_0 + \frac{\lambda}{2}} N(\varphi)d\varphi =$$

$$\int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}} N(\varphi)d\varphi = 2\text{sen}\left(\frac{\lambda}{2}\right)N(\varphi_0) = 2\text{sen}\left(\frac{\varphi_b - \varphi_a}{2}\right)N(\varphi_0).$$

Usando esse cálculo concluímos que a uma curva formada por quatro arcos alternados de círculos de raios $\frac{1}{A}$ e $\frac{1}{B}$ é fechada se, e somente se,

$$0 = \int_{S^1} g(\varphi)N(\varphi)d\varphi =$$

$$= [B - A][2\text{sen}\left(\frac{\phi_2 - \phi_1}{2}\right)N(\phi_0) + 2\text{sen}\left(\frac{\phi_4 - \phi_3}{2}\right)N(\phi_m)],$$

onde $J_1 = [\phi_1, \phi_2], J_3 = [\phi_3, \phi_4], \phi_0$ e ϕ_m são os respectivos pontos médios.

Como $A \neq B$, temos

$$\text{sen}\left(\frac{\phi_2 - \phi_1}{2}\right)N(\varphi_0) = \text{sen}\left(\frac{\phi_3 - \phi_4}{2}\right)N(\varphi_m)$$

Tomando o módulo na expressão acima concluímos que $\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_4 - \varphi_3$.

Ou seja os arcos J_1 e J_3 têm comprimentos iguais. Analogamente conclui-se que J_2 e J_4 também têm comprimentos iguais. \square

Portanto, resolver a equação $I_g(h) = 0$ para uma função g simples, positiva e periódica significa encontrar um difeomorfismo h que deforme os intervalos de modo que a condição acima seja satisfeita. Isso pode ser feito geometricamente, movendo-se o ponto de intersecção das cordas que unem extremos opostos dos arcos. Observe que, de acordo com os cálculos feitos acima $I_g(h) = [B - A] \int_{h(J_1 \cup J_3)} N(\varphi)d\varphi$.

Como estamos interessados em um argumento para o caso geral, usamos a teoria do número de voltas de uma curva fechada em $\text{Difeo}(S^1)$.

Devemos encontrar uma curva fechada (laço) $\Sigma \in \text{Difeo}(S^1)$ que é fronteira de um retângulo fechado \mathcal{D} em $\text{Difeo}(S^1)$ (2-célula) tal que $I_g(\Sigma)$ dá uma volta em torno da origem em \mathbb{R}^2 .

62 *CAPÍTULO 3. RECÍPROCA DO TEOREMA DOS QUATRO VÉRTICES*

A restrição de I_g ao retângulo \mathcal{D} (família a dois parâmetros de difeomorfismos do círculo) define uma aplicação contínua de um retângulo em \mathbb{R}^2 .

A questão agora é verificar se a imagem $I_g(\mathcal{D})$ contém a origem, isto é, se existe algum difeomorfismo \hat{h} em \mathcal{D} tal que $I(\hat{h}) = 0$.

A solução deste problema usa a relação entre o grau de uma aplicação definida em um retângulo (ou disco) e o número de voltas da imagem da sua fronteira, conforme observamos logo abaixo, no Teorema de Rouché.

De fato, provamos que $I_g(\Sigma)$ é uma curva que dá uma volta em torno da origem.

Vejamos os detalhes da construção:

Primeiramente vamos ser mais precisos em relação ao domínio da função simples g :

Sejam $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_3 = \pi$ e $\varphi_4 = \frac{3\pi}{2}$. Vamos supor que os intervalos de na definição do campo g estejam centrados nesses pontos.

Tomemos intervalos disjuntos J_1, J_2, J_3 e J_4 , centrados nestes pontos de modo que J_2 e J_4 tenham comprimentos iguais a $\frac{\pi}{4}$. O comprimento dos intervalos J_1 e J_3 é um pouco menor do que $\frac{\pi}{4}$, mas não será relevante neste momento.

Seja $\mathcal{D} = \{(t, d) \in [-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}] \times [\frac{1}{2}, 1]\}$

Considere uma família a dois parâmetros de difeomorfismos de $h_{t,d} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ tal que

$$h_{t,d}(\varphi) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - t + d(\varphi - \frac{\pi}{2}), & \text{para } \varphi \in J_2 \\ \frac{3\pi}{2} - t + (\frac{3}{2} - d)(\varphi - \frac{3\pi}{2}), & \text{para } \varphi \in J_4 \end{cases}$$

Em intervalos contendo 0 e π , $h_{t,d}$ é a identidade para todo $(t, d) \in \mathcal{D}$.

Um tal difeomorfismo é construído usando-se uma partição da unidade. Veja [58].

Usando as expressão acima para o cálculo do operador $I_g(h)$ associado à função g podemos descrever completamente a imagem $I_g(\mathcal{D})$ e de sua fronteira.

De fato,

$$I_g(h_{t,d}) = [B - A] \int_{h_{t,d}(J_2 \cup J_4)} N(\varphi) d\varphi.$$

Entretanto, usando a expressão linear de $h_{t,d}$ nesses intervalos, vemos que $h_{t,d}(J_2)$ é um intervalo centrado em $\frac{\pi}{2} - t$ e de tamanho $d\frac{\pi}{4}$ e $h_{t,d}(J_4)$ é um intervalo centrado em $\frac{3\pi}{2} - t$ e de tamanho $(\frac{3}{2} - d)\frac{\pi}{4}$.

Assim de acordo com o cálculo acima

$$I_g(h_{t,d}) = [B - A] \left(2\text{sen}\left(\frac{\pi d}{8}\right) N\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + 2\text{sen}\left(\left(\frac{3}{2} - d\right)\frac{\pi}{8}\right) N\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) \right)$$

Note que $I_g(h_{0, \frac{3}{4}}) = (0, 0)$, ou seja o difeomorfismo $h_{0, \frac{3}{4}}$ é uma solução do da

equação $I_g(h) = 0$.

Vista como uma aplicação do retângulo $\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $I_g(h_{t,d})$ é um mergulho (difeomorfismo local injetivo) cuja imagem da fronteira Σ é um laço que dá uma volta em torno da origem.

De fato, usando as coordenadas do vetor normal obtemos:

$$I_g(h_{t,d}) = [B-A] \left(2\text{sen}\left(\frac{3\pi}{32}\right) \cos\left(\frac{3\pi}{32} - \frac{\pi d}{8}\right) \text{sen}(t), 2 \cos\left(\frac{3\pi}{32}\right) \text{sen}\left(\frac{\pi d}{8} - \frac{3\pi}{32}\right) \cos(t) \right).$$

Fica como exercício mostrar que a imagem da fronteira $I_g(\Sigma)$, é a união de quatro arcos de elipses cuja distância até a origem é igual a

$$d = 4[B - A] \cos\left(\frac{3\pi}{32}\right) \text{sen}\left(\frac{\pi}{32}\right).$$

Ou seja,

$$|I_g(\Sigma)| \geq 4[B - A] \cos\left(\frac{3\pi}{32}\right) \text{sen}\left(\frac{\pi}{32}\right).$$

Segue da dependência contínua da aplicação $f \mapsto I_f$, que se tomarmos $|f - g|$ suficientemente pequeno de modo que $|I_f(\Sigma) - I_g(\Sigma)| < \frac{1}{3}d$ então $|I_f(\Sigma)| > \frac{2d}{3} > 0$.

Em particular, os laços $I_f(\Sigma)$ e $I_g(\Sigma)$ são homotópicos em $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

Isso será útil no argumento perturbativo usado no caso geral da próxima seção.

3.1.4 A solução do caso convexo.

Antes de prosseguirmos, vamos dar uma ideia de como o argumento usado na seção anterior é "robusto" e implica na solução do caso geral convexo.

Observe que nas hipóteses satisfeitas por f , (não constante, contínua, periódica e que possui dois pontos de máximo e dois pontos de mínimo locais alternados) existem quatro pontos ordenados no círculo $\varphi_1^*, \varphi_2^*, \varphi_3^*, \varphi_4^*$ tais que

$$f(\varphi_1^*) = f(\varphi_3^*) = Z < M = f(\varphi_2^*) = f(\varphi_4^*)$$

Seja $0 < \epsilon \leq \frac{\pi}{2}$ um número a ser escolhido posteriormente e considere intervalos fechados E_1^* e E_3^* contendo φ_1^* e φ_3^* respectivamente tais que

$$|f(\varphi^*) - Z| < \epsilon \quad \text{para } \varphi^* \in E_1^* \cup E_3^*$$

Analogamente sejam D_2^* e D_4^* contendo φ_2^* e φ_4^* respectivamente tais que

$$|f(\varphi^*) - M| < \epsilon \quad \text{para } \varphi^* \in D_2^* \cup D_4^*$$

Os intervalos são tomados disjuntos.

Sejam $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_3 = \pi$ e $\varphi_4 = \frac{3\pi}{2}$. Tomemos os seguintes intervalos no círculo: $E_1 = [\frac{13\pi}{8} + \frac{\epsilon}{4}, \frac{3\pi}{8} - \frac{\epsilon}{4}]$, $D_2 = [\frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}]$, $E_3 = [\frac{5\pi}{8} + \frac{\epsilon}{4}, \frac{11\pi}{8} - \frac{\epsilon}{4}]$ e $D_4 = [\frac{11\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}]$ em torno de $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ e φ_4 respectivamente.

Seja $h^* : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ um difeomorfismo que preserva orientação leva $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ e E_1, D_2, E_3, D_4 em $\varphi_1^*, \varphi_2^*, \varphi_3^*, \varphi_4^*$ e $E_1^*, D_2^*, E_3^*, D_4^*$, respectivamente. (Tente construir uma função linear por partes satisfazendo essas condições).

Considere $f \circ h^*$. A vantagem de considerarmos o operador $I_{f \circ h^*}$ associado a esta função ao invés da função f original é que os centros dos intervalos escolhidos são uniformes e que a medida de Lebesgue (Leb) do complementar de $E_1 \cup D_2 \cup E_3 \cup D_4$ é igual a ϵ .

Uma observação importante é que se resolvemos o problema para uma função $f \circ h^*$, ou seja, se existe h tal que

$$I_{f \circ h^*}(h) = \int_{\mathbb{S}^1} f \circ h^*(h^{-1}(\varphi))N(\varphi)d\varphi = 0$$

vemos que $h \circ (h^*)^{-1}$ é uma solução para o problema original, isto é, $I(h \circ (h^*)^{-1}) = 0$.

Usamos um argumento de perturbação. Para isso, definimos uma função simples g , como na seção anterior:

$$g(\varphi) = \begin{cases} M, & \text{se } \varphi \in D_2 \cup D_4 \\ Z, & \text{se } \varphi \in E_1 \cup E_3 \end{cases}$$

com $|(f \circ h^*)(\varphi) - g(\varphi)| < \epsilon$, se $\varphi \in E_1 \cup E_3 \cup D_2 \cup D_4$.

Observe que $m(\mathbb{S}^1 - E_1 \cup E_3 \cup D_2 \cup D_4) < \epsilon$ onde m denota a medida da união dos sub-intervalos no complementar (ou a medida de Lebesgue).

Como isso, temos que as imagens $I_{f \circ h^*}(\mathcal{D})$ e $I_g(\mathcal{D})$ estão ϵ próximas. Também sabemos que $I_g(h_0, 3/4) = 0$ e que $I_g(\Sigma)$ é positivo. Logo, tomando $\epsilon < \frac{\text{dist}(I_g(\Sigma), O)}{3}$ obtemos, pela continuidade de $I_F(h)$ que $I_{f \circ h^*}(B)$ contém a origem.

Usando propriedades do número de voltas, que recordamos logo abaixo, isso implica que existe um zero de $I_{f \circ h^*}$ em \mathcal{D} .

Como vimos anteriormente, isto implica que existe um zero de I_f em \mathcal{D} . Segue então a recíproca do TQV, no caso convexo, conforme a discussão no início desta seção.

Vamos recordar algumas propriedades do *Número de Voltas de uma curva fechada*. A referência é [58]. Se $\lambda : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ é uma curva fechada (C^1) por partes) o número inteiro $\frac{1}{2\pi} \int_{\lambda} \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$ chama-se o número de voltas que

a curva dá em torno da origem. Por translação define-se o número de voltas em relação a qualquer ponto que não está na imagem.

Observe que a forma $\frac{ydx+xdy}{x^2+y^2}$ é fechada, portanto, curvas homotópicas em $\mathbb{R}^2 - (0, 0)$ possuem o mesmo número de voltas.

Uma maneira prática para calcular o número de rotação (número de voltas) é a seguinte.

Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ uma curva contínua. Então existe uma função contínua $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\gamma(t) = |\gamma(t)|(\cos \varphi(t), \text{sen} \varphi(t)). \tag{3.3}$$

A diferença $\varphi(b) - \varphi(a)$ é independente de φ e quando γ for uma curva fechada com $\gamma(a) = \gamma(b)$ o número $W(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi}(\varphi(b) - \varphi(a))$ é o número de rotação de γ em torno de 0. De fato $W(\gamma, 0)$ mede o número de voltas efetivas que γ dá em torno de 0.

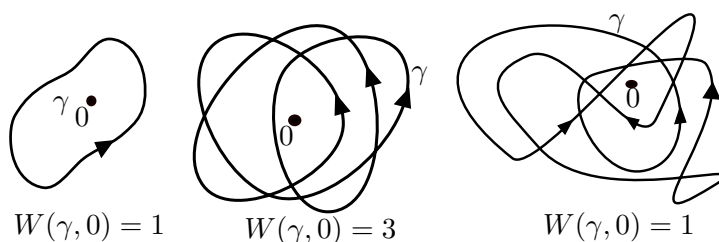


Figura 3.1: Número de rotação de uma curva em relação a um ponto.

Outro conceito importante é o de índice de rotação.

Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular. O índice de γ é o número de rotação da curva $\gamma' : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ será denotado por $\text{Ind}(\gamma) = W(\gamma', 0)$.

Proposição 12. *O índice de rotação de uma curva $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, regular e fechada é igual a sua curvatura total dividida por 2π , i. e.*

$$2\pi \text{Ind}(\gamma) = \int_0^L k(s)ds = \int_a^b k(t)|\gamma'(t)|dt.$$

Demonstração. Confiamos ao leitor. □

O conceito de número de voltas é muito útil. Por exemplo, é possível provar o Teorema da Curva de Jordan usando o número de voltas. Um curva simples e fechada divide o plano em duas classes de pontos: aqueles para os quais o número de voltas é zero e os que o número de voltas é $+1$ ou -1 .

Também é usado para mostrar a existência de zeros de sistemas de equações. Em dimensão dois, dado o sistema de equações $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$. Considere a aplicação $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$. Suponha que D seja um disco tal que a imagem do seu bordo $\Sigma = \partial D$ por F não contenha a origem. Então se o número de voltas de $F(\Sigma)$ for não nulo, então existe um ponto $(x_0, y_0) \in D$ tal que $F(x_0, y_0) = (0, 0)$. Ou seja, existe uma solução do sistema de equações no interior do disco D .

No argumento acima, para obter uma solução para o operador, calculamos um número de voltas via homotopia e verificamos que é não nulo.

Uma propriedade útil para obter a homotopia foi a seguinte resultado enunciado com Teorema de Rouché em [58].

Teorema 7. *Sejam $F, G : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^2 com $F(x, y) \neq (0, 0)$ para todo $(x, y) \in \partial D$. Então $F + G$ e F possuem o mesmo número de voltas em relação à origem.*

Além disso, se $F(x, y) \neq (0, 0)$ para todo $(x, y) \in D$, então o número de voltas de F é nulo.

3.1.5 Conclusão da recíproca do TQV.

A conclusão da recíproca do TQV é obtida da seguinte maneira:

Dada uma função contínua, periódica e positiva, $k : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$, considere o campo normal definido por $\theta \mapsto \frac{N(\theta)}{k(\theta)}$, com θ é a coordenada no círculo \mathbb{S}^1 , de modo que, sem perda de generalidade estamos supondo que o período mínimo é igual a 2π .

Segue da análise realizada na subseção 3.1.4, que existe um difeomorfismo $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ tal que $\int_0^{2\pi} \frac{N(\theta)}{k(h(\theta))} d\theta = 0$.

Multiplicando por uma constante, se necessário, podemos supor que a curvatura total $\int_0^{2\pi} k(h(u)) du = 2\pi$. Isso garante que a curva obtida é simples. Uma mudança de escala no final do processo não altera esta propriedade.

Defina a única curva parametrizada regular, que satisfaz $\hat{\gamma}(0) = (0, 0), \hat{\gamma}'(0) = (1, 0)$

$$\hat{\gamma}(\theta) = \int_0^\theta \frac{N(u)}{k(h(u))} du.$$

Então $\hat{\gamma}$ é fechada e simples com curvatura $k_{\hat{\gamma}} = k \circ h$.

Se $\gamma = \hat{\gamma} \circ h^{-1}$, então, γ é simples, fechada, com curvatura igual a k . Como queríamos.

O argumento de Dahlberg no caso geral segue a mesma linha, porém com várias dificuldades técnicas a serem superadas entre elas o fato de que não podemos usar o ângulo da normal com uma direção fixa para parametrizar a curva. Veja [15] e [16].

3.2 Exercícios.

3.1. Seja $\gamma(s) = (\frac{1}{6} \cos(3s) + \frac{3}{2} \cos(s), \frac{1}{6} \sin(3s) + \frac{5}{2} \sin(s))$.

i) Mostre que sua curvatura é igual a $k(s) = 1/(2 + \cos(2s))$.

ii) Calcule o número de voltas que γ dá em torno de $(0, 0)$.

3.2. Seja $\gamma(s) = (\frac{1}{2} \sqrt{2} \arctan(\sqrt{2} \cos(s)), \frac{1}{6} \sqrt{6} \operatorname{arctanh}(\frac{\sqrt{6}}{3} \sin(s)))$. Mostre que sua curvatura é igual $k(s) = 2 + \cos 2s$. Esboce o traço de γ .

3.3. Encontre uma curva γ tal que sua curvatura seja igual a $k(s) = 1/(2 + |\sin 2s|)$. A curva γ é fechada? Qual é a classe de diferenciabilidade de γ ?

3.4. Considere a curva $\gamma(t)$ definida por

$$\begin{cases} \gamma_-(t) = ((1-t) \cos t + \sin t, (1-t) \sin t - \cos t + 1), & t < 0 \\ \gamma_+(t) = ((1+t) \cos t - \sin t, (1+t) \sin t + \cos t - 1), & t \geq 0. \end{cases}$$

i) Mostre que γ é somente de classe C^1 no ponto $t = 0$.

ii) Mostre que a curvatura de γ é igual a $k(t) = 1/(1 + |t|)$ e portanto existe $k(0) = \lim_{t \rightarrow 0} k(t) = 1$.

iii) Calcule os pontos de autointersecção de γ e esboce o traço de γ .

3.5. Considere uma função $k : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ suave, positiva, possuindo exatamente dois pontos críticos, um de mínimo e outro de máximo. Existe uma difeomorfismo $\varphi : S^1 \rightarrow S^1$ tal que $k \circ \varphi$ seja a curvatura de uma curva fechada com um ponto de cruzamento normal? Faça uma análise detalhada.

3.6. Seja $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica com período minimal T_k . Suponha

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{T_k} k(s) ds = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}, \quad \operatorname{mdc}(m, n) = 1.$$

Pelo teorema fundamental das curvas planas existe uma curva $\gamma_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que sua curvatura é igual a k .

i) Mostre que γ_k é periódica de período nT_k . Veja [4]

68 *CAPÍTULO 3. RECÍPROCA DO TEOREMA DOS QUATRO VÉRTICES*

ii) Seja $k(s) = \frac{1}{3} + \text{sen } s$. Mostre que a curva γ tem período 6π e esboce o seu traço.

iii) Faça vários exemplos ilustrando o resultado do item i) e estude o artigo [4].

3.7. Seja $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função 2π -periódica definida, no domínio fundamental, por

$$r(s) = \begin{cases} 1 + 2\text{sen } s, & s \in [0, \pi] \\ 1, & s \in [\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

i) Mostre que a curva

$$\gamma(s) = \begin{cases} (-s + \frac{1}{2} \text{sen } 2s + \cos s, \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2s + \text{sen } s) & s \in [0, \pi] \\ (-\pi + \cos s, \text{sen } s) & s \in [\pi, 2\pi], \end{cases}$$

possui curvatura $k(s) = 1/r(s)$.

ii) Descreva a curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que sua curvatura seja igual a $1/r$. Esboce o trace de γ . Veja [34] para mais comentários sobre a recíproca do teorema dos quatro vértices.

3.8. Considere uma curva fechada definida por justaposição de 4 arcos de círculos

$$X(t) = \begin{cases} (\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos t, \frac{3}{2} \text{sen } t), & t \in [0, \pi] \\ (\cos t, \text{sen } t), & t \in [\pi, 2\pi] \\ (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos t, \frac{1}{2} \text{sen } t), & t \in [2\pi, 3\pi] \\ (1 + \cos t, \text{sen } t), & t \in [3\pi, 4\pi] \end{cases}$$

i) Mostre que X é C^1 por partes e calcule sua curvatura.

ii) Mostre que existe uma curva γ , fechada, suave e C^1 próxima de X possuindo 4 vértices.

3.9. Seja $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função 2π -periódica definida, no domínio fundamental, por

$$r(s) = \begin{cases} 2 + \text{sen } s, & s \in [0, \pi] \\ 2 - a \text{sen } s, & s \in [\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

i) Encontre uma curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que sua curvatura seja igual a $1/r$. Esboce o trace de γ .

ii) Mostre que γ obtida no item i) é uma curva de Jordan de classe C^1 se, e somente se, $a = 1$.

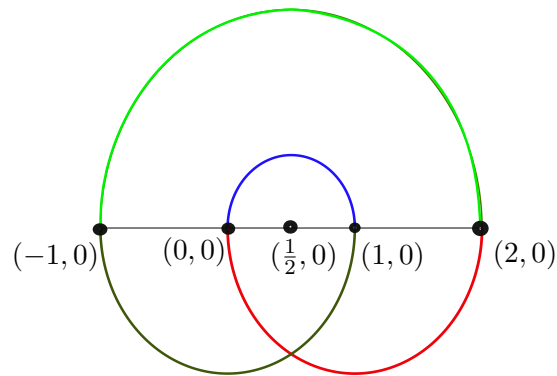


Figura 3.2: Curva fechada não simples, obtida por justaposição de 4 arcos de círculos.

- 3.10.** i) Construa uma curva fechada simples, C^1 por partes obtida por justaposição de 4 arcos de círculos $\gamma_i(t) = (a_i + r_i \cos t, b_i + r_i \sin t)$, $t \in [\alpha_i, \beta_i]$.
- ii) Construa uma curva fechada simples, C^1 por partes, obtida por justaposição de 4 arcos de elipses $\gamma_i(t) = (a_i + r_i \cos t, b_i + s_i \sin t)$, $t \in [\alpha_i, \beta_i]$.
- iii) Construa uma curva fechada simples, C^1 por partes, obtida por justaposição de 6 arcos de círculos $\gamma_i(t) = (a_i + r_i \cos t, b_i + r_i \sin t)$, $t \in [\alpha_i, \beta_i]$.

Capítulo 4

Curvatura afim de curvas planas

“Mathematicians do not study objects, but relations between objects.”

“La géométrie n’est pas vrai, elle est avantageuse”

“One geometry cannot be more true than another; it can only be more convenient.”

– H. Poincaré (1854-1912).

Neste capítulo faremos uma breve descrição da teoria da curvatura afim de curvas planas. Vários resultados locais e globais são análogos ao caso euclidiano, entretanto não é um simples dicionário relacionar estas duas geometrias. Para uma introdução mais aprofundada no assunto sugerimos [38], [64], [79].

4.0.1 Comprimento afim de curvas planas.

O comprimento afim de uma curva localmente convexa $\gamma(u) = (x(u), y(u))$ é definido por:

$$s(u) = \int_0^u (x'y'' - x''y')^{1/3} du = \int_0^u \det(\gamma', \gamma'')^{1/3} du \quad (4.1)$$

Geometricamente o comprimento afim é baseado na área do paralelogramo gerado pelos vetores γ' e γ'' .

Em todo o capítulo iremos supor que o paralelogramo gerado por γ' e γ'' esteja positivamente orientado e seja não degenerado. Este é o caso de curvas estritamente convexas.

Observamos que o comprimento de arco afim é invariante pelo grupo afim do plano, i. e., a curva $\beta(u) = A\alpha(u) + b$ com $\det(A) = 1$ possuem o mesmo comprimento.

4.0.2 Ponto de vista da geometria afim.

O grupo afim das transformações do plano é gerado pelas translações e pelas transformações lineares invertíveis.

É também bastante natural, análogo ao caso euclidiano, considerar os conceitos de comprimento e curvatura de curvas que sejam "invariantes" pelo grupo afim.

Considere uma curva regular $c(s) = (x(s), y(s))$ no plano afim \mathbb{A}^2 munido da forma de área canônica $\omega = dx dy$ e suponha que $[c'(s), c''(s)] = 1$. Isto é sempre possível quando c é uma curva convexa, isto é, a sua curvatura euclidiana é positiva.

Derivando esta equação obtemos que $[c'(s), c'''(s)] = 0$ e portanto, como estamos supondo $c' \neq 0$, temos que:

$$c'''(s) + k_a(s)c'(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_a = [c''(s), c'''(s)].$$

A função k_a é denominada *curvatura afim* de c .

Lema 13. *Seja c uma convexa fechada simples e suponha que a mesma esteja parametrizada pelo comprimento de arco afim s . A função k'_a é ortogonal a $\{1, c\}$.*

Demonstração. De fato,

$$\int_0^L k'_a(s) ds = 0,$$

$$\int_0^L k'_a(s)c(s) ds = - \int_0^L k_a(s)c'(s) ds = \int_0^L c'''(s) ds = 0.$$

□

Em relação a uma parametrização $\gamma(u) = c(s(u))$ temos que

$$\begin{aligned} \gamma' &= c_s s' \\ \gamma'' &= c_{ss}(s')^2 + c_s s'' \\ \gamma''' &= c_{sss}(s')^3 + 3c_{ss}s' s'' + c_s s''' \end{aligned}$$

onde $c_s = dc/ds$, etc.

Além disso temos,

$$\begin{aligned} (s')^3 &= [\gamma', \gamma''] \\ 3(s')^2 s'' &= [\gamma', \gamma'''] \\ 6s'(s'')^2 + 3(s')^2 s''' &= [\gamma', \gamma''''] + [\gamma'', \gamma'''] \end{aligned}$$

Logo, usando que $k_a(s) = [c_{ss}, c_{sss}]$, obtemos:

$$k_a(u) = \frac{4[\gamma'', \gamma'''] + [\gamma', \gamma'''']}{3[\gamma', \gamma'']^{\frac{5}{3}}} - \frac{5[\gamma', \gamma''']^2}{9[\gamma', \gamma'']^{\frac{8}{3}}} \quad (4.2)$$

Observação 7. Na equação (4.2) é importante observar o caráter intrínseco da curvatura expressado pelo balanço das derivadas.

Em relação a parametrização $\gamma(u) = (x(u), y(u))$ definida pela função suporte h temos que:

$$\begin{aligned} x(u) &= h(u) \cos u - h'(u) \operatorname{senu} \\ y(u) &= h'(u) \cos u + h(u) \operatorname{senu} \end{aligned}$$

Logo, por cálculos longos mas elementares, temos:

$$k_a(u) = \frac{9r(u)^2 - 3r''(u)r(u) + 4(r'(u))^2}{9r(u)^{\frac{10}{3}}} \quad (4.3)$$

onde $r(u) = h''(u) + h(u)$

Em relação a parametrização $\gamma(u) = (u, y(u))$ temos que $(ds/du)^3 = [\gamma', \gamma''] = y''$ e o referencial de Frenet afim $\{T, N\}$ tal que $[T, N] = 1 = 1$ é dado por:

$$T = \frac{1}{(y'')^{\frac{1}{3}}} (1, y'), \quad N = (y'')^{-\frac{1}{3}} T' = \frac{1}{3(y'')^{\frac{5}{3}}} (-y''', 3(y'')^2 - y' y''').$$

Portanto a curvatura afim k_a definida por $(y'')^{-\frac{1}{3}} N' = -k_a T$ é dada por:

$$k_a(u) = \frac{3y'' y'''' - 5(y''')^2}{9(y'')^{\frac{8}{3}}} = -\frac{1}{2} \left((y'')^{-\frac{2}{3}} \right)'' \quad (4.4)$$

Outra forma de calcular a curvatura afim acima, equação (4.4), é obtê-la diretamente pela equação (4.2).

Exemplo 10. A parábola $P(s) = (s, as^2)$, $a \neq 0$, tem curvatura afim igual a zero.

A elipse $E(s) = (a \cos s, b \operatorname{sens} s)$ tem curvatura afim igual a $(ab)^{-\frac{2}{3}}$.

O ramo de hipérbole $H(s) = (a \operatorname{cosh} s, b \operatorname{senh} s)$ tem curvatura afim igual a $-(ab)^{-\frac{2}{3}}$.

Lema 14. Uma curva regular no plano afim com curvatura afim constante é uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole.

Demonstração. Segue diretamente da integração da equação diferencial linear $c'''(s) + k_a c'(s) = 0$. \square

Observação 8. No contexto da geometria afim o sinal da curvatura afim não depende da parametrização da curva, apenas do seu traço. Isto segue diretamente da equação (4.2).

Lema 15. A curvatura afim de uma curva convexa $c(s) = (x(s), y(s))$ parametrizada pelo comprimento de arco euclidiano s é expressa por

$$k_a = \frac{9(k_e)^4 + 3(k_e)''(k_e) - 5(k_e')^2}{9(k_e)^{8/3}},$$

onde k_e é a curvatura euclidiana de c .

Demonstração. Nas condições acima temos que $k_e = [c', c'']$. Pelas equações de Frenet obtemos:

$$[c'', c'''] = k_e^3, \quad [c', c'''] = k_e', \quad [c', c''''] = k_e'' - k_e^3.$$

O resultado segue portanto da equação (4.2) □

O análogo do referencial de Frenet na Geometria afim é o referencial dado por $\{c', c''\} = \{t, n_a\}$ com $[t, n_a] = 1$. O vetor n_a é chamado *normal afim* a c . Portanto as equações de Frenet são :

$$\begin{aligned} t' &= 0 \cdot t + 1 \cdot n_a \\ n_a' &= -k_a t + 0 \cdot n_a \end{aligned} \tag{4.5}$$

Proposição 13. Considere uma curva convexa γ parametrizada pelo comprimento de arco afim s e seja $p_0 = \gamma(0)$. Dado um ponto $p_1 = \gamma(s_1)$ próximo de p_0 considere a parábola tangente a γ passando pelos pontos p_0 e p_1 e seja $\Sigma = \Sigma(s_1)$ o comprimento afim do arco de parábola entre os pontos p_0 e p_1 . Veja Fig. 4.1. Então a curvatura afim de γ em p_0 é dado por

$$k_a(p_0) = \pm \lim_{s_1 \rightarrow 0} \sqrt{\frac{720(\Sigma - s_1)}{s_1^5}}.$$

Demonstração. Exercício. Interprete o sinal da curva. □

4.0.3 Intepretação geométrica do vetor normal afim.

Considere uma curva convexa $\gamma(s)$ e fixe um ponto $p_0 = \gamma(s_0)$. Trace a família de retas paralelas ao vetor tangente $\gamma'(s_0)$ e considere a corda obtida intersectando a reta $R(t, s_1) = \gamma(s_1) + t\gamma'(s_0)$ com a curva $\gamma(s)$. Veja Fig. 4.2. Denote os pontos

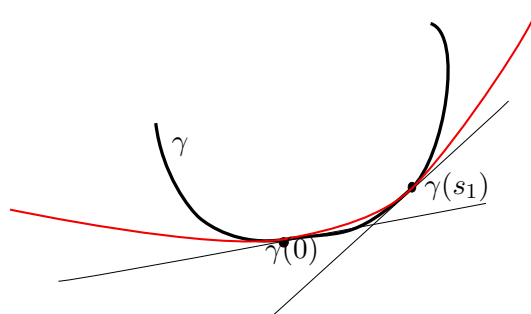


Figura 4.1: Interpretação geométrica da curvatura afim.

de intersecção da reta $R(t, s_1)$ com a curva $\gamma(s)$ por $\gamma(s_1)$ e $\overline{\gamma(s_1)}$ e defina a curva $\beta(s_1) = \frac{1}{2}(\gamma(s_1) + \overline{\gamma(s_1)})$. A curva β é chamada *curva central*.

Lema 16. *O vetor normal afim a γ no ponto s_0 é colinear ao vetor tangente a curva β no ponto s_0 .*

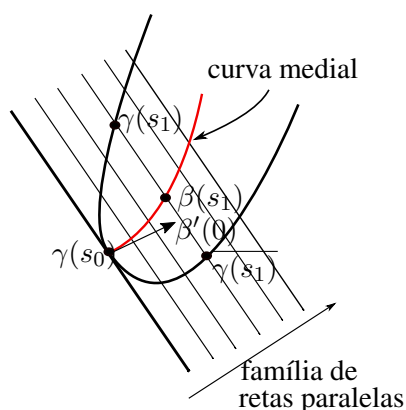


Figura 4.2: Curva central e vetor normal afim.

Demonstração. Fixamos $p_0 = (0, 0)$ e parametrizamos a curva γ na forma de gráfico $\gamma(u) = (u, h(u)) = (u, \frac{1}{2}a_2u^2 + \frac{1}{6}a_3u^3 + \frac{1}{24}a_4u^4 + O(u^5))$. Calculando a intersecção entre as retas horizontais $R(t, u) = t(1, 0) + (u, h(u)) = (t+u, h(u))$ com a curva γ concluímos que a curva central β é parametrizada por $\beta(v) = (-\frac{1}{6}\frac{a_3}{a_2}v + O(v^{\frac{3}{2}}), \frac{1}{2}a_2v + O(v^{\frac{3}{2}}))$, onde $v = \sqrt{u}$. Logo $\beta'(0) = (-\frac{1}{6}\frac{a_3}{a_2}, \frac{1}{2}a_2)$.

Por outro lado, parametrizando a curva γ pelo comprimento de arco afim s obtemos

$$\begin{aligned}\gamma(s) &= (x(s), y(s)) \\ x(s) &= \frac{s}{\sqrt[3]{a_2}} - \frac{1}{6} \frac{a_3 s^2}{a_2^{5/3}} + \frac{(-3 a_4 a_2 + 5 a_3^2) s^3}{54 a_2^3} + O(s^4), \\ y(s) &= \frac{1}{2} \sqrt[3]{a_2} s^2 + \frac{(5 a_3^2 - 3 a_2 a_4) s^4}{216 a_2^{7/3}} + O(s^5)\end{aligned}$$

Portanto o vetor normal afim no ponto p_0 é igual a $\gamma''(0) = (-\frac{1}{3} \frac{a_3}{a_2^{5/3}}, \sqrt[3]{a_2})$ que é colinear ao vetor $\beta'(0)$. \square

Exercício. Na curva $\gamma(u) = (u, h(u))$ acima mostre que $k_a(0) = \frac{1}{9} \frac{3 a_4 a_2 - 5 a_3^2}{a_2^{8/3}}$ e

$$\frac{dk_a}{du}(0) = \frac{1}{27} \frac{9 a_5 a_2^2 - 45 a_2 a_3 a_4 + 40 a_3^3}{a_2^{11/3}}.$$

Exercício. Seja γ uma curva convexa tal que toda curva central seja uma reta. Mostre que γ é uma cônica.

Proposição 14. Seja $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular convexa de classe C^k , $k \geq 3$, com curvatura euclidiana $k_e > 0$.

Então o vetor normal afim é dado por

$$n_a = \frac{1}{[\beta', \beta'']^{\frac{2}{3}}} \left(\beta'' - \frac{1}{3} \frac{[\beta', \beta''']}{[\beta', \beta'']} \beta' \right) \quad (4.6)$$

Demonstração. Seja $\gamma(s) = \beta(t(s))$ a reparametrização de β pelo comprimento de arco afim s . Denote por $\dot{\gamma} = d\gamma/ds$ e $\beta' = d\beta/dt$. O normal afim é o vetor $\ddot{\gamma}$. Assim temos $\dot{\gamma} = \dot{t} \beta'$, $\ddot{\gamma} = \dot{t}^2 \beta'' + \ddot{t} \beta'$ e $\ddot{\gamma} = \dot{t}^3 \beta''' + 3\dot{t} \ddot{t} \beta'' + \ddot{t} \beta'$. Usando a equação $[\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}] = 1$ obtemos $\dot{t} = [\beta', \beta'']^{-1/3}$. Derivando a equação $[\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}] = 1$ obtemos $[\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}] = 0$ e portanto $\ddot{t} = -\frac{1}{3} \dot{t}^2 \frac{[\beta', \beta''']}{[\beta', \beta'']}$. Simplificando segue o resultado enunciado na equação (4.6). \square

Observação 9. Nas condições da Proposição 14 se t for o comprimento de arco euclidiana e k_e a curvatura euclidiana de β com base ortonormal positiva $\{T, N\}$ ao longo de β temos que

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{k_e^{1/3}} T, \quad \ddot{\gamma} = -\frac{1}{3} \frac{k_e'}{k_e^{5/3}} T + k_e^{1/3} N.$$

4.0.4 Contato com cônicas.

No caso da curvatura euclidiana o natural foi considerar o contato da curva com a família de círculos tangentes e obtemos o círculo osculador que possui um contato de ordem maior com a curva dentre todos os círculos tangentes.

Na curvatura afim, o análogo é considerar o contato da curva com a família de cônicas tangentes e detectar a cônica com contato de maior ordem.

Definição 10. Um ponto p_0 de uma curva γ localmente convexa é chamado sextático se existe uma cônica passando por p_0 e possuindo contato de ordem maior ou igual a 6 com a curva γ no ponto p_0 .

Definição 11. Um ponto $p_0 = \gamma(s_0)$ de uma curva γ localmente convexa é chamado um vértice afim quando for um ponto crítico da curvatura afim k_a de γ .

Consideramos um referencial (x, y) e escrevemos a curva c na forma de gráfico

$$y(x) = a_0 + \frac{a_2}{2}x^2 + \frac{a_3}{6}x^3 + \frac{a_4}{24}x^4 + \frac{a_5}{5!}x^5 + \frac{a_6}{6!}x^6 + O(7).$$

Observamos que sempre podemos normalizar as coordenadas sob a ação do grupo afim de forma a fazer $a_2 = 1$ e $a_3 = 0$. Portanto a curvatura afim de c no ponto $(0, a_0)$ é igual a $a_4/3$ que iremos supor positiva.

Portanto assumiremos a curva na forma normal

$$y(x) = a_0 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{a_4}{24}x^4 + \frac{a_5}{120}x^5 + \frac{a_6}{6!}x^6 + O(7). \quad (4.7)$$

Consideramos também a elipse definida pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{b^2}{a^4}.$$

Portanto a série de Taylor da elipse é:

$$y_e(x) = -\frac{b^2}{a^2} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}\frac{a^2}{b^2}x^4 + \frac{1}{16}\frac{a^4}{b^4}x^6 + O(8)$$

Portanto sua curvatura euclidiana no ponto $(0, -\frac{b^2}{a^2})$ é igual a 1.

O contato entre c escrita na forma normal (4.7) e a elipse é de quarta ordem quando $a_0 = -\frac{b^2}{a^2}$ e $\frac{a_4}{3} = \frac{a^2}{b^2}$ e será de sexta ordem ou superior quando também $a_5 = 0$.

Neste caso temos que $(0, a_0)$ é vértice afim de γ pois $k'_a(0) = \frac{a_5}{3}$.

Assim concluímos que os conceitos de ponto sextático e vértice afim são equivalentes.

Proposição 15. Considere uma curva $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizada pelo comprimento de arco afim s , i. e., $[\gamma', \gamma''] = 1$.

Então para todo s existe uma única cônica $\mathcal{C}(s)$ (cônica osculadora) tangente a γ no ponto $\gamma(s)$ possuindo um contato de ordem 5 no ponto $\gamma(s_0)$ se, e somente

se, $k'(s_0) \neq 0$. A cônica $\mathcal{C}(s)$ e γ possuem contato de ordem 6 no ponto $\gamma(s_0)$ se, e somente se, $k'_a(s_0) = 0$ e $k''_a(s_0) = 0$.

Demonstração. Escolha um referencial tal que $\gamma(0) = 0$, $\gamma'(0) = (1, 0)$ e $\gamma''(0) = (0, 1)$. Usando a equação $\gamma''' + k(s)\gamma'(s) = 0$ temos a seguinte expansão em série de Taylor

$$\begin{aligned} \gamma(s) = & \left(s - \frac{1}{6}ks^3 - \frac{1}{4!}k's^4 + \frac{1}{5!}(k^2 - k'')s^5 + \frac{1}{6!}(4kk' - k''')s^6 + O(7) \right) \gamma'(0) \\ & + \left(\frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{4!}ks^4 - \frac{2}{5!}k's^5 + \frac{1}{6!}(k^2 - 3k'')s^6 + O(7) \right) \gamma''(0), \end{aligned}$$

onde $k = k(0)$, $k' = k'(0)$, $k'' = k''(0)$ e $k''' = k'''(0)$.

Uma cônica passando por 0 e tangente a γ em $(0, 0)$ é definida implicitamente por $F(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + y = 0$.

Definindo $g(s) = F(\gamma(s))$ temos: $g(0) = 0$, $g'(0) = 0$, $g''(0) = 2a + 1$, $g'''(0) = 3c$, $g''''(0) = -k(8a + 1) + 6b$, $g'''''(0) = (10a + 2)k' - 15ck$. Impondo a condição de contato quártico ou superior obtemos $a = -1/2$, $b = -k/2$, $c = 0$. Logo a única cônica tangente e possuindo contato de ordem 5 ou superior com γ em $(0, 0)$ é dada por $F(x, y) = 2y - x^2 - ky^2 = 0$.

Logo $g(s) = \frac{1}{20}(k's^5 + \frac{1}{6}k''s^6 + O(7))$. Isto conclui a demonstração. \square

Exercício. Considere um arco $\gamma = \gamma(t)$ tal que sua curvatura afim não possua pontos críticos. Então a família de cônicas osculadoras $\mathcal{C}(t)$ define uma folheação numa região do plano (decomposição em cônicas disjuntas e encaixadas). Maiores detalhes veja, [18] e [31].

4.0.5 Deformação de cônicas.

Considere uma curva convexa com função suporte $h(s) = 1 + \epsilon H(s)$

Usando a equação (4.3) e fazendo os cálculos, obtemos que:

$$\begin{aligned} k_a(s) &= 1 - \frac{\epsilon}{3}[H'''' + 5H''' + 4H](s) + O(\epsilon^2) \\ &= 1 - \frac{\epsilon}{3}[(D^2 + I)(D^2 + 4I)H(s)] + O(\epsilon^2), \quad D = \frac{d}{ds}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Teorema 8. Considere uma curva convexa fechada γ_ϵ , deformação infinitesimal de uma elipse. Então γ_ϵ possui pelo menos seis vértices afins.

Demonstração. Pela equação (4.8) temos que os vértices de γ_ϵ são, em primeira aproximação, dados pelos zeros da função

$$W(s) = D(D^2 + I)(D^2 + 4I)H(s) = 0.$$

Escrevendo a série de Fourier de H na forma

$$H = h_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(ks) + b_k \text{sen}(ks)]$$

temos que $W(s) = 120[b_3 \cos(3s) - a_3 \text{sen}(3s)] + \dots$.

Logo pelo Teorema 3 e também pela Proposição 10, temos que W possui pelo menos 6 zeros. \square

O análogo do teorema dos 4-vértices para a geometria afim é o teorema dos 6-vértices.

Teorema 9. *Uma curva de Jordan convexa possui pelo menos 6 vértices afins.*

Demonstração. Seguiremos a demonstração dada em [38, pág. 152].

Afirmção: Seja γ uma curva convexa fechada com curvatura afim k_a . Então para todo polinômio quadrático $q(x, y)$ temos que $\int_\gamma q(x, y) dk_a = 0$.

De fato,

$$\begin{aligned} \int_\gamma dk_a &= 0, \\ \int_\gamma x dk_a &= \int_0^L x(s) k'_a(s) ds = - \int_0^L k_a(s) x'(s) ds = \int_0^L x'''(s) ds = 0. \\ \int_\gamma x^2 dk_a &= \int_0^L x(s)^2 k'_a(s) ds = -2 \int_0^L k_a(s) x(s) x'(s) ds = 2 \int_0^L x(s) x'''(s) ds \\ &= -2 \int_0^L x'(s) x''(s) ds = 2 \int_0^L d(x')^2 ds = 0. \\ \int_\gamma xy dk_a &= \int_0^L x(s) y(s) k'_a(s) ds = - \left[\int_0^L k_a(s) (x'(s) y(s) + x(s) y'(s)) ds \right] \\ &= \int_0^L x'''(s) y(s) ds + \int_0^L y'''(s) x(s) ds = 0. \end{aligned}$$

Portanto, a derivada k'_a da curvatura afim k_a é ortogonal em $L^2([0, L], \mathbb{R})$ ao conjunto de funções $\{1, x, y, x^2, xy, y^2\}$. Logo, fazendo raciocínio análogo a demonstração analítica do teorema dos 4 vértices obtemos o resultado. Mais precisamente, a condição k'_a ortogonal ao conjunto de funções $\{1, x, y\}$ implica a existência de pelo menos 4 vértices.

Suponha que k'_a possua somente quatro zeros, os quais denotamos por $p_i = \gamma(s_i)$. Suponha p_1 e p_3 pontos de máximos locais e p_2 e p_4 pontos de mínimos locais. Veja Fig. 4.3. Nestas condições existe um polinômio quadrático $q(x, y) = q_1(x, y)q_2(x, y)$ (produto de dois fatores lineares) tal que $q(p_i) = q(\gamma(s_i)) = 0$. Portanto $\text{sinal}(q(\gamma(s))) = \text{sinal}(k'_a)$. Logo $\int q(\gamma(s))k'_a > 0$, o que é uma contradição.

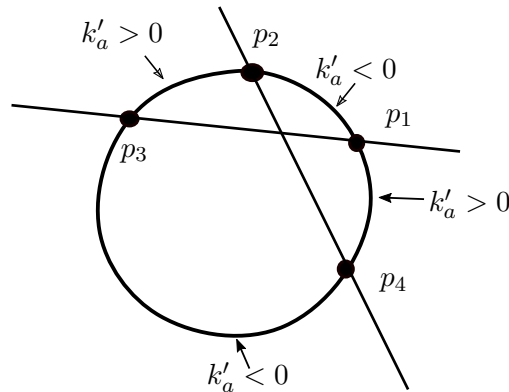


Figura 4.3: Definição de polinômio quadrático com 4 zeros no círculo.

□

Observação 10. Veja [39] para uma demonstração usando ideias da teoria de Sturm. Outra demonstração recente podem ser vista em [88]. Veja também [67] e [85].

4.1 Conjunto focal afim.

Consideramos uma curva regular fechada e estritamente convexa c parametrizada tal que $[c'(s), c''(s)] = 1$. Derivando a equação acima obtemos, $[c'''(s), c'(s)] = 0$ e portanto, $c'''(s) = -k_a(s)c'(s)$.

A função k_a é chamada *curvatura afim* de c . Então a cáustica afim de c é dada por

$$\gamma(s) = c(s) + \frac{1}{k_a(s)}c''(s).$$

Os pontos singulares da cáustica de c são chamados de *cúspides afins*.

Assim temos o teorema.

Teorema 10. *Seja c uma curva regular de Jordan tal que $[c'(s), c''(s)] = 1$. Suponhamos que sua curvatura afim k_a seja não nula. Então γ possui pelo menos 6*

pontos de cúspides afins.

Demonstração. Nas condições acima temos $[c'''(s), c''(s)] = -k_a(s) \neq 0$. Portanto aplicando o Teorema 9 temos que os vértices afins de c correspondem aos pontos de cúspides afins da cáustica associada. \square

4.2 Exercícios.

4.1. Considere a curva fechada $\gamma(u) = (\cos u - a \sin 2u, \sin u + a \cos 2u)$.

- Mostre que quando $|a| > \frac{1}{2}$ ou $|a| < \frac{1}{4}$, γ é localmente convexa e possui somente dois vértices afins.
- Mostre que quando $0 < a < \frac{1}{4}$, γ é simples e convexa e faça um estudo sobre os seus vértices afins.
- Análise os vértices afins e as inflexões de γ quando $\frac{1}{4} \leq |a| \leq \frac{1}{2}$.

4.2. Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave e seja $T_t(x)$ o seu polinômio de Taylor de grau menor ou igual a n no ponto $x = t$. Isto é,

$$T_t(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x-t)^k.$$

- Suponha n par e $f^{n+1}(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Então para todo $a, b \in I$ os gráficos de T_a e T_b são disjuntos em toda a reta.
- Suponha n ímpar e $f^{n+1}(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Então para todo $a < b \in I$ os gráficos de T_a e T_b são disjuntos no intervalo $[b, \infty)$.
- Estude o artigo [31], disponível no endereço: <https://arxiv.org/pdf/1207.5662.pdf>

4.3. Considere a cúbica definida por $h(x, y) = y^2 - x(x-a)(x-b) = c$ e suponha $0 < a < b$. Mostre que toda oval $h(x, y) = c$, para c próximo de zero, é convexa e possui exatamente 6 vértices afins.

- 4.4.**
- Dê exemplo de um arco de curva γ tal que as curvaturas euclidianas k_e e afim k_a de γ sejam iguais ou proporcionais.
 - Mostre que existem arcos de curvas não circulares γ tais que $k_e = k_a \neq \text{cte}$.
 - Existe uma curva fechada (que não seja circular) tal que $k_e/k_a = \text{cte}$?

4.5. Considere uma curva regular estritamente convexa γ de classe C^k , $k \geq 5$. Fixa $p_0 = \gamma(s_0)$ e suponha que as curvaturas euclidiana k_e e afim k_a de γ em p_0 sejam não nulas.

i) Analise as várias possibilidades de contato entre o círculo osculador \mathcal{C}_0 e a cônica osculadora \mathcal{Q}_0 de γ passando por p_0 .

ii) Mostre que em geral $\mathcal{Q}_0 \cap \mathcal{C}_0 = \{p_0, p_0^*\}$. Repetindo a construção num ponto $\gamma(s)$ obtemos uma curva $p^*(s)$ com $p^*(s_0) = p_0^*$. A curva p^* tem alguma particularidade geométrica relevante?

ii) Quando temos que $\mathcal{Q}_0 = \mathcal{C}_0$?

4.6. Considere um arco injetivo de uma curva regular plana γ possuindo dois pontos de inflexões consecutivos genéricos (a função $A(t) = [\gamma', \gamma'']$ possui somente zeros transversais) $p_1 = \gamma(s_1)$ e $p_2 = \gamma(s_2)$. Mostre que existe um ponto sextático $\gamma(s^*)$ com $s_1 < s^* < s_2$.

4.7. Considere uma curva plana γ parametrizada pelo gráfico $y(x) = x^2 + ax^5 + a_6x^6 + a_7x^7 + a_8x^8 + O(9)$.

i) Mostre que pela ação das transformações birracionais lineares (quociente de funções lineares) é sempre possível reduzir, localmente, uma curva plana na forma normal acima. Lembramos que o grupo acima é gerado pelas transformações da forma $T(x, y) = \left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}, \frac{\alpha_1x+\beta_1y+\gamma_1}{\alpha_2x+\beta_2y+\gamma_2} \right)$.

ii) Mostre que a curva algébrica de grau 3 que possui contato de ordem 9 ou superior com γ é

$$C_3(x, y) = \left[a_6 y (x^2 - y) - a (ay^3 + x^3 - xy) \right] a_{11} + \left[a_7 y (x^2 - y) - a (axy^2 + a_6 y^3 + x^2 - y) \right] a_{01}$$

Sugestão: Escreva $C(x, y) = \sum_{i+j=3} a_{ij}x^i y^j + \sum_{i+j=2} a_{ij}x^i y^j + a_{10}x + a_{01}y$ e imponha a condição de que a função $h(x) = C(x, y(x))$ tenha derivadas até a ordem 8 nula na origem. Veja [56].

4.8. i) Investigue a recíproca do teorema dos seis vértices. Veja [85].

ii) Quais são as condições necessárias e suficientes para que uma função contínua e periódica seja a curvatura afim de uma curva fechada e convexa?

4.9. i) Pesquise na literatura os conceitos de curvatura discreta e vértices para curvas poligonais simples no plano.

ii) Investigue a versão discreta do teorema dos quatro vértices e dos 6 vértices para curvas poligonais de Jordan. Veja [13], [14] e [67].

4.10. (Projeto). Veja [28, cap. 3].

Problema 1. Dados n segmentos s_i de comprimentos $a_i > 0$ e $n - 1$ ângulos $\alpha_i > 0$ tais que $\sum \alpha_i \leq \pi/2$ determine o arco poligonal convexo formado pelos segmentos s_i e ângulos externos α_i (todos com a mesma orientação positiva) tal que a distância euclidiana entre o ponto inicial e o final seja máxima.

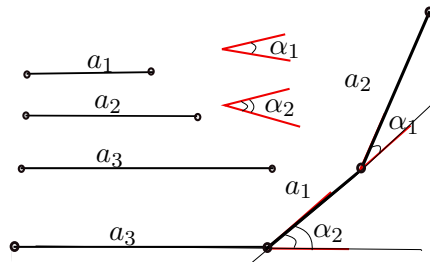


Figura 4.4: Ilustração de uma poligonal convexa com três lados e dois ângulos externos dados.

Observamos que podemos formar exatamente $n! \times (n - 1)!$ arcos poligonais convexos distintos.

ii) Analise o problema 1 sem fazer restrições na soma dos ângulos α_i .

iii) Formule e analise o problema análogo ao problema 1 para poligonais não convexas; neste caso os ângulos externos podem alternar para obter curvas não convexas. A Fig. 4.5 mostra uma poligonal não convexa $[a_0, a_1, a_2; \alpha_1(+), \alpha_2(-)]$ com ângulos externos orientados. Qual é a intuição para a solução do problema neste caso particular?

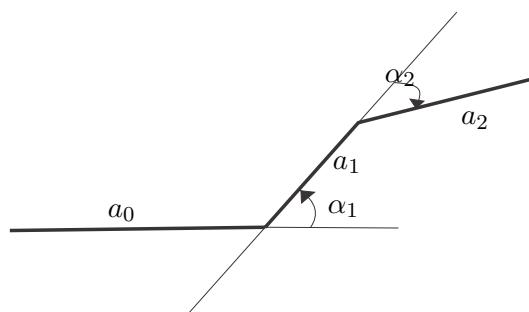


Figura 4.5: Ilustração de uma poligonal não convexa com três lados e dois ângulos externos orientados.

4.11. i) Demonstre o teorema de Schur para curvas convexas esféricas e no plano hiperbólico.

ii) Demonstre o teorema de Schur para curvas convexas no plano de Minkowski. Veja [60].

4.12. Investigue os vértices afins de curvas convexas fechadas definidas por um campo de vetores quadrático no plano. Veja Exercício 2.21. Veja [76].

4.13. Considere três retas $L_i(x, y) = a_i x + b_i y + c_i = 0$ em posição geral no plano \mathbb{R}^2 .

i) Calcule os círculos tangentes as retas L_i .

ii) Analise a geometria das cúbicas definidas por $L = L_1 L_2 L_3 = 0$.

Capítulo 5

Problema de Toeplitz

“Mathematics is the most beautiful and most powerful creation of the human spirit.”

“One can imagine that the ultimate mathematician is one who can see analogies between analogies.”

– Stefan Banach (1892-1945)

Neste capítulo iremos expor um outro problema geométrico relacionado a curvas planas. Trata-se do problema de inscrever um quadrado numa curva fechada e simples no plano, formulado por Toeplitz [89]. Veja [62] para uma visão recente (survey) sobre o tema e suas variações.

5.1 Problema do Quadrado Inscrito de Toeplitz.

Nesta seção iremos considerar o problema de Toeplitz no caso especial da curva ser convexa e demonstrar o resultado obtido em [20]. Em toda a sua generalidade este é ainda um problema em aberto, ou seja, não resolvido. Para desenvolvimento recente sobre o problema veja [86].

Problema 2 (Toeplitz, [89]). *Dado uma curva de Jordan (fechada e simples) γ no plano \mathbb{R}^2 . É possível obter um quadrado com vértices contidos no traço da curva γ ?*

Para ilustrar a generalidade do problema veja a Fig. 5.1.

A partir do problema de Toeplitz podemos formular várias outros relacionados, tais como, quantos quadrados inscritos existem e qual é a sua paridade? Existem infinitos quadrados inscritos em curvas fechadas simples não circulares?

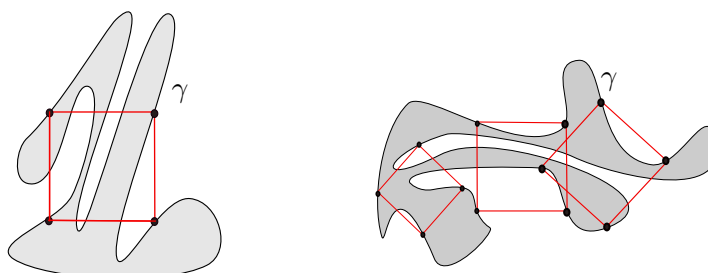


Figura 5.1: Quadrados inscritos em curvas de Jordan.

Exemplo 11. Na elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ existe apenas um quadrado inscrito. Os seus vértices são $(\pm \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}, \pm \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}})$.

Exemplo 12. Na quártica $Q_4 = \{(x, y) : x^4 + y^4 = 1\}$, o quadrado com vértices $(\pm 2^{-1/4}, \pm 2^{-1/4})$ está inscrito em Q_4 . Também o quadrado com vértices $(\pm 1, 0)$ e $(0, \pm 1)$ está inscrito em Q_4 . De fato existem infinitos quadrados inscritos em Q_4 . Com efeito, as retas $y = kx$ e $y = -\frac{1}{k}x$ intersectam a quártica Q_4 nos 4 pontos $P_1 = (\frac{1}{\sqrt[4]{1+k^4}}, \frac{k}{\sqrt[4]{1+k^4}})$, $P_2 = (\frac{k}{\sqrt[4]{1+k^4}}, -\frac{1}{\sqrt[4]{1+k^4}})$, $P_3 = -P_1$ e $P_4 = -P_2$ que são vértices de um quadrado de lado $L(k) = \sqrt{2} \frac{\sqrt{k^2+1}}{\sqrt[4]{1+k^4}}$. Observamos que $L(0) = \lim_{k \rightarrow \infty} L(k) = \sqrt{2}$ e $\max_{k \in [0, \infty)} L(k) = L(1) = 2^{3/4}$.

Exercício. i) Dê exemplos de várias curvas de Jordan possuindo infinitos quadrados inscritos.

ii) No retângulo de vértices $(\pm a, \pm b)$, $(a > b)$, encontre todos os quadrados inscritos.

iii) No paralelogramo gerado pelos vetores $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (a, b)$. $(a \neq 0)$, determine todos os quadrados inscritos.

iv) Na elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, justifique a unicidade do quadrado inscrito.

v) Na hipérbole $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, determine todos dos quadrados inscritos.

Teorema 11 (A. Emch). *Seja γ uma curva convexa de classe C^2 , fechada e simples (curva de Jordan). Então sempre existe um quadrado inscrito em γ .*

A demonstração é baseada nos lemas introduzidos a seguir.

Considere um ponto $p \in \gamma$ e um par de retas ortogonais \mathcal{L}_1 e \mathcal{L}_2 passando pelo ponto p .

Considere a família de retas $(\mathcal{L})_\alpha$ paralelas a \mathcal{L}_1 (análogo para \mathcal{L}_2) e considere a curva γ_α definida pelos pontos médios das cordas $[P_1(\alpha), P_2(\alpha)]$, o segmento compacto intersectando a reta \mathcal{L}_α com a curva γ . Analogamente considere a curva γ_β referente a construção acima para a família de retas paralelas a \mathcal{L}_2 .

Lema 17. As curvas γ_α e γ_β intersectam-se em apenas um ponto p_{12} contido no interior da curva γ . Veja Fig. 5.2

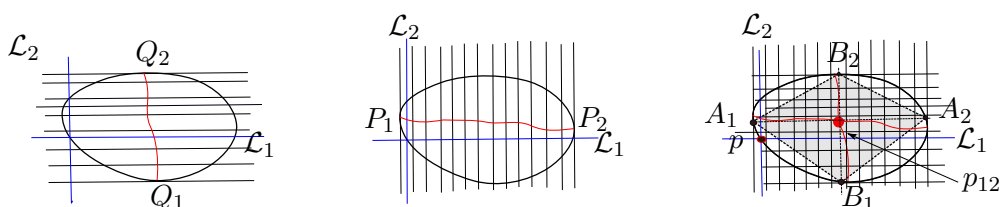


Figura 5.2: Losango inscrito numa curva convexa.

Demonstração. Pela construção acima as curvas γ_α e γ_β estão contidas no interior de γ e intersectam-se em pelo menos um ponto p_{12} .

Pelo ponto p_{12} considere as retas paralelas a \mathcal{L}_1 e \mathcal{L}_2 passando por p_{12} e intersectando a curva γ em quatro pontos A_1, A_2, B_1, B_2 . Veja 5.2. Pela construção das famílias de retas paralelas temos que o quadrilátero tendo como vértices os pontos A_1, A_2, B_1 e B_2 é um losango (diagonais cruzando ortogonalmente e lados paralelos de mesmo comprimento).

Caso exista mais de um ponto de intersecção entre γ_α e γ_β iremos obter outro losango com centro p'_{12} e vértices A'_1, B'_1, A'_2, B'_2 . Estes dois losangos possuem lados paralelos. Uma possibilidade é de que pelo menos um dos vértices do se-

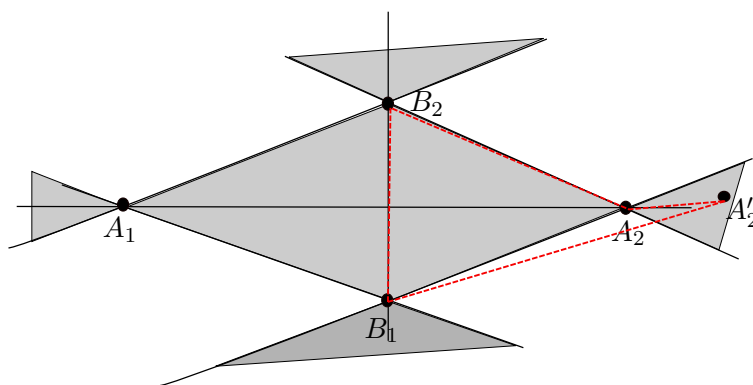


Figura 5.3: Unicidade do losango inscrito na curva convexa.

gundo losango pertença a uma das regiões sombreadas na Fig. 5.3 referente ao primeiro losango. Assim obtemos um quadrilátero não convexo inscrito em γ . Uma contradição. Confiamos ao leitor verificar as demais possibilidades das possíveis posições relativas entre os losangos e concluir a demonstração do lema. \square

Temos associado a cada par de retas ortogonais $\{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2\}$ passando pelo ponto $p \in \gamma$ um único losango $L = \{A_1, A_2, B_1, B_2\}$ inscrito na curva γ . É claro que o mesmo losango é obtido tomando o par $\{\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_1\}$.

Lema 18. *Existe uma correspondência biunívoca entre todos os pares de retas ortogonais passando por p e todos os losangos inscritos em γ .*

Demonstração. \Rightarrow Segue do lema 17.

\Leftarrow Considere um losango $L = \{A_1, A_2, B_1, B_2\}$ inscrito em γ com eixos de simetrias ortogonais $\{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2\}$ com $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \{p_{12}\}$.

Por uma translação e uma rotação obtemos um par de retas ortogonais $\{\mathcal{L}'_1, \mathcal{L}'_2\}$ passando por p e paralelas a $\{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2\}$. Aplicando o lema 17 obtemos um losango $L' = \{A'_1, A'_2, B'_1, B'_2\}$ inscrito em γ e com lados paralelos aos do losango L . Novamente pelo lema 17 temos que $L = L'$. Isto conclui a demonstração. \square

Considere a seguir os comprimentos das diagonais do losango e denote por $\lambda = |A_1A_2|$ e $\mu = |B_1B_2|$ e para fixar o argumento suponha que a reta \mathcal{L}_1 seja horizontal (eixo x) e a reta \mathcal{L}_2 vertical (eixo y).

A família ortogonal de pares de retas $\{\mathcal{L}_1(\theta), \mathcal{L}_2(\theta)\}$ fazendo um ângulo θ com o par $\{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2\}$ dá origem a família de losangos $L(\theta)$ tais que $\lambda(0) = \mu(\pi/2)$ e $\lambda(\pi/2) = \mu(0)$.

De fato, a variação no intervalo $[0, \pi/2]$ faz com que o losango com vértices $\{A_1, B_1, A_2, B_2\}$ em $\theta = 0$ evolui ao losango com vértices $\{B_1, A_2, B_2, A_1\}$ quando atingimos o ponto $\theta = \pi/2$. Convidamos ao leitor analisar a situação na elipse. Como todo o processo é contínuo temos, pelo Teorema do Valor Intermediário, que existe pelo menos um $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tal que $\lambda(\theta_0) = \mu(\theta_0)$ e portanto temos definido o quadrado inscrito em γ . Portanto o teorema 11 está demonstrado.

5.2 Exercícios.

5.1. Determine todos os quadrados inscritos na curva fechada simples de classe C^1 definida por $x^2 + y^2 = 1$, $y > 0$ e $x^4 + y^4 = 1$, $y \leq 0$.

5.2. Determine todos os quadrados inscritos na curva fechada simples de classe C^0 definida por

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right), & |x| < 1 \\ x^4 + y^4 = 1, & y \leq 0. \end{cases}$$

5.3. Calcule os quadrados inscritos nas curvas algébricas $x^{2m} + y^{2m} = 1$, $m \geq 3$.

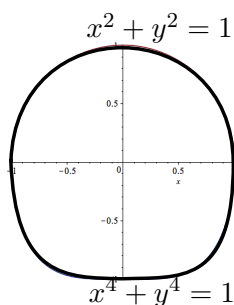


Figura 5.4: Curva convexa de classe C^1 .

5.4. Mostre que existe um cubo inscrito no elipsóide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$.

5.5. Mostre que numa curva algébrica de grau d no plano temos infinitos quadrados inscritos ou no máximo $(5d^4 - 5d^2 + 4d)/4$. Veja [62].

5.6. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função não negativa de classe C^k , $k \geq 1$, e D um disco convexo tal que $f(p) \geq 0, p \in D$ e $f(p) = 0, p \notin D$.

Seja $d > 0$ um número real dado. Mostre que existem quatro pontos p_i , ($i = 1, \dots, 4$) formando um quadrado de lado d e centro contido em D , tal que $f(p_1) = f(p_2) = f(p_3) = f(p_4)$. Veja [24].

5.7. i) Mostre que existem infinitos paralelogramos inscritos na elipse $E_1(x, y) = x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = 0$.

Sugestão: Encontre esta família de paralelogramos todos tangentes a elipse

$$E_2(x, y) = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{b^2}{a^4} \right) x^2 + \left(\frac{a^2}{b^4} + \frac{1}{b^2} \right) y^2 - 1 = 0.$$

Os paralelogramos inscritos são as órbitas de período 4 associado ao par de elipses confocais $\{E_1, E_2\}$.

ii) Encontre um paralelogramo inscrito na elipse E_1 e que possua perímetro máximo.

Referências Bibliográficas

- [1] H. ALENCAR e W. SANTOS, *Geometria das Curvas Planas*, XII Escola de Geometria Diferencial, IME/UFG, (2002).
- [2] V. ARNOLD, *Topological Invariantes of Plane Curves and Caustics*, American Mathematical Society, University Lectures Series, **05** (1991).
- [3] V. ARNOLD, *The geometry of spherical curves and the algebra of quaternions*. Russian Math. Survey, **50** (1995), pp. 3-68.
- [4] J. ARROYO, O. J. GARAY, J. J. MENCÍA, *When is a periodic function the curvature of a closed plane curve?* Amer. Math. Monthly **115** no. 5, (2008), p. 405-414.
- [5] M. BERGER AND B. GOSTIAUX, *Introduction to Differential Geometry*, Springer Verlag, New York, (1987).
- [6] BJÖRN E. J. DAHLBERG, *The converse of the four vertex theorem*. Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005), p. 2131-2135.
- [7] BJÖRN E. J. DAHLBERG, *A discrete four vertex theorem*. Geom. Dedicata **133** (2008), p. 111-128.
- [8] J. W. BRUCE, P. J. GIBLIN,, *Curves and singularities. A geometrical introduction to singularity theory*. Second edition. Cambridge University Press, Cambridge, (1992). xviii+321 pp.
- [9] D. BURAGO; Y. BURAGO; S. IVANOV, *A course in metric geometry*, Graduate Studies in Mathematics, **31**, (2001).
- [10] G. CAIRNS, R. W. SHARPE, *On the inversive differential geometry of plane curves*. Enseign. Math. (2) **36** (1990), no. 1-2, p. 175-196.
- [11] M. DO CARMO, *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, CTU 04, Sexta Edição, SBM, (2014).

- [12] M. CRAIZER, *Evolutas de curvas e superfícies*, 3^o Colóquio de Matemática da Região Sudestes, UFU, (2015) 55p.
- [13] M. CRAIZER, R. C. TEIXEIRA and MOACYR A. H. B. DA SILVA *Affine Properties of Convex Equal-Area Polygons*, *Discrete Comput Geom* **48** (2012) p. 580-595 .
- [14] B. E. J. DAHLBERG, *A discrete four vertex theorem*. *Geom. Dedicata* **133** (2008), 111-128.
- [15] B. E. J. DAHLBERG, *The converse of the four vertex theorem*. *Proc. Amer. Math. Soc.* **133** (2005), no. 7, 21312135.
- [16] D. DETURCK, H. GLUCK, D. POMERLEANO and D. SHEA VICK, *The four vertex theorem and its converse*. *Notices Amer. Math. Soc.* **54** no. 2 (2007), , p. 192-207.
- [17] F. S. DIAS; F. TARI, *On vertices and inflections of plane curves*, *Journal of Singularities* **17** (2018), 70-80.
- [18] J. DYMARA, *Duality for Curves in Affine Plane Geometry*, *Geometriae Dedicata* **79** (2000) p. 189-204.
- [19] S. EDWARDS and R. A. GORDON, *Extreme curvature of polynomials*. *Amer. Math. Monthly* **111** (2004), p. 890-899,
- [20] A. EMCH, *Some properties of closed convex curves in a plane*, *American Journal of Mathematics*, **35** (1913), p. 407-412.
- [21] D. FIGUEIREDO, *Séries de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. Projeto Euclides, IMPA, (1996).
- [22] H. G. EGGLESTON, *Figures inscribed in convex sets*, *Amer. Math. Monthly*, **65** (1958), 76-80.
- [23] C. ESCUDERO, A. REVENTÓS, *An interesting property of the evolute*. *Amer. Math. Monthly* **114** (2007), no. 7, 623-628.
- [24] R. FENN, *The table theorem*. *Bull. London Math. Soc.* **2** (1970), p. 73-76.
- [25] B. FREITAS, R. GARCIA, *Inflection points on hyperbolic tori of \mathbb{S}^3* . *Quart. Journal of Mathematics* **69** (2018), no. 2, 709-728.

- [26] D. FUCHS, S. TABACHNIKOV, *Mathematical omnibus. Thirty lectures on classic mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, (2007). xvi+463 pp.
- [27] M. GAGE ; R. S. HAMILTON, The heat equation shrinking convex plane curves. *J. Differential Geom.* **23** (1986), no. 1, p. 69-96.
- [28] R. GARCIA, *Dinâmica e Geometria*, 2^o Colóquio de Matemática da Região Nordeste da SBM, UFPI, (2012).
- [29] M. GHOMI, *Vertices of closed curves in Riemannian surfaces*. *Comment. Math. Helv.* **88** (2013), no. 2, 427-448.
- [30] E. GHYS, *A singular mathematical promenade*, ENS Éditions, Lyon, (2017). viii+302 pp.
- [31] E. GHYS; S. TABACHNIKOV; V. TIMORIN, *Osculating curves: around the Tait-Kneser theorem*. arXiv:1207. 5662v1 [math. DG] 24 Jul 2012 and *Math. Intelligencer* **35** (2013), no. 1, p. 61-66.
- [32] P. GIBLIN, S. A. BRASSET, *Local symmetry of plane curves*, *American Math. Monthly*, **92** (1985), 689-707.
- [33] P. J. GIBLIN, J. P. WARDER, *Reconstruction from medial representations*. *Amer. Math. Monthly* **118** (2011), no. 8, p. 712-725.
- [34] H. GLUCK, *The converse to the four vertex theorem*, *Enseignement Math.* (2) **17** (1971), p. 295-309.
- [35] W. C GRAUSTEIN, *A new form of the four-vertex theorem*. *Monatsh. Math. Phys.* **43** (1936), no. 1, p. 381-384.
- [36] H. GUGGENHEIMER, *Sign changes, extrema, and curves of minimal order*. *Journal of Differential Geometry* **03**, (1969), pp. 512-521.
- [37] H. GUGGENHEIMER, *Notes on Geometry, two short proofs of the four vertex theorem*, *Archivum Mathematicum* **5**, No. 3,(1969), p. 125-130.
- [38] H. GUGGENHEIMER, *Differential geometry*. McGraw-Hill Book Co. , Inc. , (1963) x + 378 pp. Reprinted by Dover Publications, (1977).
- [39] L. GUIEU, E. MOURRE, V. YU. OVSIENKO, *Theorem on six vertices of a plane curve via the Sturm theory*, arXiv:dg-ga/9510008 (1995) and *The Arnold-Gelfand Mathematical Seminars*, Birkhauser, Basel, (1997).

- [40] E. HEIL, *Some vertex theorems proved by means of Möbius transformations*. Ann. Mat. Pura Appl. **85** (1970) p. 301-306.
- [41] WOUTER VAN HEIJST, *The algebraic square peg problem*, arXiv:1403. 5979 [math. AG] (2014).
- [42] D. HILBERT AND S. COHN VOSSEN, *Geometry and the Imagination*, Chelsea, (1952).
- [43] H. HOPF, *Differential Geometry in the Large*, Springer Lecture Notes in Mathematics, vol. 1000, (1983).
- [44] HUBERT L. BRAY and JEFFREY L. JAUREGUI, *On curves with nonnegative torsion*, Arch. Math. **104** (2015), p. 561-575.
- [45] M. HUIBREGTSE, A. WINCHELL, *Envelope curves and equidistant sets*. Involve **9** (2016), no. 5, 839-856.
- [46] A. HURWITZ, *Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (3), **9**, (1902), p. 357-408.
- [47] S. B. JACKSON, *Vertices of Plane Curves*, Bull. Amer. Math. Soc. , August, **50** (1944), 564-578.
- [48] S. B. JACKSON, *Geodesic vertices on surfaces of constant curvature*. Amer. J. Math. **72**, (1950) p. 161-186.
- [49] S. KAKUTANI, *A proof that there exists a circumscribing cube around any closed convex set in \mathbb{R}^3* , Ann. of Math. (2) vol. **43** (1942) p. 739-741.
- [50] A. G. KHOVANSKIĪ, *Fewnomials*, Translations of Mathematical Monographs, 88, American Mathematical Society, Providence, RI, (1991), pages viii+139,
- [51] W. KLINGENBERG *A Course in Differential Geometry*, Graduate Texts, 51, Springer Verlag, (1978).
- [52] A. KNESER, *Bemerkungen über die Anzahl der Extreme der Krümmung auf geschlossenen Kurven und über verwandte Fragen in einer nicht-euklidischen Geometrie*, Festschrift zum 70. Geburtstag von H. Weber, Leipzig, (1912) 170-180.
- [53] E. KREYSZIG, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, New York, (1978).

- [54] S. R. LAY, *Convex sets and their applications*, John Wiley & Sons, (1982) and Dover Collection, New York, (2007).
- [55] F. KUCZMARSKI, *Roads and wheels, roulettes and pedals*. Amer. Math. Monthly 118 (2011), no. 6, p. 479-496
- [56] E. P. LANE, *Projective Differential Geometry*, American Math. Monthly, Vol. **40**, p. 568-579.
- [57] M. LEVI; S. TABACHNIKOV, *On bicycle tire tracks geometry, hatchet planimeter, Menzin's conjecture, and oscillation of unicycle tracks*. Experiment. Math. **18** (2009), no. 2, p. 173-186.
- [58] E. LIMA, *Análise*. Vol. 2, Projeto Euclides, IMPA, (1981).
- [59] L. L. DE LIMA, J. F. B. MONTENEGRO, *Evolução de curvas planas pela curvatura*. X Escola de Geometria Diferencial, Belo Horizonte: Gráfica UFMG, (1998) 160p.
- [60] R. LÓPEZ, *The theorem of Schur in the Minkowski plane*, Journal of Geometry and Physics **61** (2011), p. 342-346.
- [61] H. MARTINI and Z. MUSTAFAEV, *A new construction of curves of constant width*. Computer Aided Geometric Design **25** (2008) p. 751-755
- [62] B. MATSCHKE, *A survey on the square peg problem*, Notices Amer. Math. Soc. **61** (2014), no. 4, p. 346-352.
- [63] S. MUKHOPADHYAYA, *New methods in the geometry of a plane arc*, Bull. Calcutta Math. Soc. **1** (1909), p. 32-47.
- [64] K. NOMIZU; T. SASAKI, *Affine differential geometry*, Cambridge University Press, (1994).
- [65] R. OSSERMAN, *The four-or-more vertex theorem*, American Mathematical Monthly, **92**, (1985), p. 332-337.
- [66] V. OVSIENKO, S. TABACHNIKOV, *Hyperbolic Carathéodory conjecture*. Proc. Steklov Inst. Math. **258** (2007), p. 178-193.
- [67] V. OVSIENKO, S. TABACHNIKOV, *Projective differential geometry old and new. From the Schwarzian derivative to the cohomology of diffeomorphism groups*. Cambridge Tracts in Mathematics, 165 (2005). xii+249 pp.

- [68] V. OVSIENKO, S. TABACHNIKOV, *Projective geometry of polygons and discrete 4-vertex and 6-vertex theorems*. Enseign. Math. (2) **47** (2001), no. 1-2, p. 3-19.
- [69] V. OVSIENKO, V. YU., *Projective differential geometry: old and new*. Surveys in modern mathematics, 328–337, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 321, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (2005).
- [70] I. PAK, *Lectures on Discrete and Polyhedral Geometry*, (2010) <http://www.math.ucla.edu/pak/book.htm>
- [71] U. PINKALL, *On the four-vertex theorem*, Aequationes Mathematicae **34** (1987) 221-230.
- [72] GEORGE POLYA and GABOR SZEGO, *Problems and Theorems in Analysis II. Theory of Functions. Zeros. Polynomials. Determinants. Number Theory*. Springer Verlag, Geometry. Reprint of the 1976 Edition.
- [73] M. PONCE, P. SANTIBÁÑEZ, *On equidistant sets and generalized conics: the old and the new*, Amer. Math. Monthly **121** (2014), 18-32.
- [74] A. SALOOM; F. TARI, *Curves in the Minkowski plane and their contact with pseudo-circles*. Geom. Dedicata **159** (2012), p. 109-124.
- [75] D. SHAFER, A. ZEGELING, *Vertices of planar curves under the action of linear transformations*. J. Geom. **73** (2002), no. 1-2, 148-175.
- [76] D. SHAFER, A. ZEGELING, *Geometry of cycles in quadratic systems*. Qual. Theory Dyn. Syst. **3** (2002), no. 1, 251-274.
- [77] D. SIERSMA, *Properties of conflict sets in the plane*, Banach Center Publications, Geometry and topology of caustics, Caustics'98, vol. **50**, (1999), p. 267-276.
- [78] J. SOTOMAYOR, *Curvas Definidas por Equações Diferenciais no Plano*, 13^o Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, (1981).
- [79] M. SPIVAK, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, vol. III, Publish of Perish Berkeley, (1979).
- [80] D. STRUIK, *Lectures on Classical Differential Geometry*, Addison Wesley, (1950), Reprinted by Dover Collections, (1978).

- [81] S. TABACHNIKOV, *Around four vertices*. Russian Math. Surveys **45** (1990), no. 1, p. 229-230.
- [82] S. TABACHNIKOV, *The four-vertex theorem revisited-two variations on the old theme*. Amer. Math. Monthly **102** (1995), no. 10, p. 912-916.
- [83] S. TABACHNIKOV, *Parametrized Plane Curves, Minkowski Caustics, Minkowski Vertices and Conservative Line Fields*, L'Enseignement Mathématique, **43**, (1997), 3-26.
- [84] S. TABACHNIKOV, *Tire track geometry: variations on a theme*. Israel J. Math. **151** (2006), p. 1-28.
- [85] S. TABACHNIKOV, *Converse Sturm–Hurwitz–Kellogg theorem and related results*, J. Fixed Point Theory Appl. **3** (2008), no. 1, p. 121-130.
- [86] T. TAO, *An integration approach to the Toeplitz square peg problem*, Forum Math. Sigma **5** (2017), e30, 63 pp.
- [87] R. THOM, *Problèmes rencontrés dans mon parcours mathématique: un bilan*, Publications Mathématiques de l'I. H. E. S, tome **70** (1989), p. 199-214.
- [88] G. THORBERGSSON, M. UMEHARA, *A global theory of flexes of periodic functions*. Nagoya Math. J. **173** (2004), p. 85-138.
- [89] O. TOEPLITZ, *Ueber einige Aufgaben der Analysis situs*, Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft in Solothurn **4** (1911), 197.
- [90] I. VAINSENER, *Introdução as Curvas Algébricas Planas*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, (2009).
- [91] F. VOLOCH, *Curvas de lagura constante*. Matemática Universitária, **05** (1987), p. 69-75.

Índice Remissivo

- 3-elipse, 19
- arco monótono, 9
- círculo
 - bitangente, 11
 - bitangente, 26
 - circunscrito, 32
 - osculador, 8, 25
- cônica osculadora, 71
- comprimento de arco afim, 65
- congruência de retas, 12
- conjunto
 - de conflito, 21
 - de simetria, 28, 31
 - focal afim, 74
- contato entre curvas, 7
- curva
 - implícita, 38
 - algébrica, 39
 - central, 69
 - convexa, 11
 - de Jordan, 7, 15
 - de largura constante, 18
 - estritamente convexa, 11
 - não simples, 41
 - pedal, 46
 - esférica, 46
- curvatura, 6, 17, 19, 36, 39, 44
 - geodésica, 46
- derivada de Schwartz, 45
- evoluta, 14
- função suporte, 24
- lemniscata, 17
- losango inscrito, 80
- número
 - de rotação, 60
 - de voltas, 60
- normal
 - afim, 69
 - de Gauss, 53
- par de curvas, 42
- polinômio, 46
- polinômio de Taylor, 75
- ponto
 - cúspide regular, 39
 - de inflexão, 36
 - cúspide regular, 39
 - crítico, 7
 - cúspide, 15
 - de inflexão, 39, 45
 - sextático, 70
 - singular, 14
- problema
 - de Toeplitz, 79
 - de distância máxima, 76
- quadrado inscrito, 79
- raio de curvatura, 8, 25

série de Fourier, 50

sistema de Chebyshev, 36

sistema de Chebyshev, 35

Teorema

convergência de Blashke, 27

de Bezout, 40

de Rouché, 61

de Schur, 47

de Vogt, 47

dos quatro vértices, 7, 23

dos seis vértices, 72

recíproca dos 4 vértices, 52, 53

transformação de Möbius, 45

vértice, 7, 14, 44

vértice afim, 71

vértices, 39